Bollettino Unione Matematica Italiana

Adriano Barlotti

Sui $\{k; n\}$-archi di un piano lineare finito.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 553–556.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_553_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Sui $\{k;\, n\}$-archi di un piano lineare finito.

Nota di Adriano Barlotti (a Firenze)

Sunto. - *Chiamato* $\{k;\, n\}$-*arco di un piano lineare finito* S_q, *di ordine* q, *un insieme di* k *punti di* S_q, *dei quali mai* $n+1$ *risultino allineati, si indicano delle limitazioni superiori per il valore di* k *necessarie per l'esistenza di un* $\{k;\, n\}$-*arco.*

Nel n. 3 si estende inoltre agli $\{(n-1)(q+1);\, n\}$-*archi la proprietà che afferma la non esistenza di* $(q+1)$-*archi completi in* S_q, *con* q *pari.*

1. Indichiamo con S_q un piano lineare finito su un corpo di Galois di ordine q (1). Generalizzando la nozione di k-arco di un S_q, introdotta recentemente da B. Segre (2), chiameremo $\{k;\, n\}$-arco di S_q un insieme di k punti di S_q, dei quali mai $n+1$ risultino allineati (3). Si presenta allora il problema (4) di *determinare, per un dato valore di* n, *quale è il massimo valore di* k *per cui in* S_q *esista qualche* $\{k;\, n\}$-*arco.*

Noi mostreremo qui di seguito come si possano facilmente ottenere delle limitazioni superiori per il valore di k, le quali precisamente dicono che, per $2 < n \leq q$, possono esistere in S_q dei $\{k;\, n\}$-archi solo se $k \leq (n-1)q + n - 2$ quando sia $q \not\equiv 0 \pmod{n}$, oppure se $k \leq (n-1)q + n$ qualora risulti $q \equiv 0 \pmod{n}$. Alcuni semplici esempi indicano come la limitazione stabilita dia in qualche caso, corrispondente però a valori molto particolari di q o di n, una risposta al problema posto sopra. Rileviamo anche come la limitazione ottenuta per $q \not\equiv 0 \pmod{n}$, e $2 < n \leq q$, sia più forte di quella che vale per i k-archi di S_q con q dispari. Ciò lascia presumere che limitando inferiormente il valore di n essa possa ulteriormente essere migliorata.

2. Sia K un $\{k;\, n\}$-arco di un piano finito S_q. In relazione a K le rette di S_q si distingueranno in *secanti, tangenti* od *esterne* a seconda che contengano n, un numero positivo minore di n, o infine zero punti di K. I punti del piano non appartenenti a K

(1) Per le proprietà fondamentali dei piani lineari finiti si veda, p. es., B. Segre [3], § 17. Tali piani coincidono con i piani grafici irriducibili desarguesiani finiti; da quest'ultimo punto di vista essi sono stati studiati, p. es., in G. Zappa [5].

(2) Cfr. B. Segre [4], p. 359, dove è data più in generale la nozione di k-arco per uno spazio lineare finito di dimensione qualsiasi.

(3) I $\{k;\, 2\}$-archi coincidono quindi con i k-archi.

(4) Si confronti il problema $I_{r,q}$, posto da B. Segre in [4], pag. 359.

saranno detti *esterni* o *interni* rispetto a K, a seconda che da essi esca o no qualche retta tangente a K.

Poichè su ogni retta uscente da un punto, P, di K si hanno al più $n-1$ punti di K oltre P, segue subito che i punti di K sono tutt' al più in numero di:

$$(n-1)q+n. \tag{1}$$

Nel caso banale in cui sia $n=q+1$ la (1) dà per k il valore che risolve il problema proposto. Perciò, e dato che per $n=2$ K è un k-arco, e per i k-archi piani la questione che ci siamo posti è completamente risolta ([5]), supporremo sempre $2<n\leq q$. Nel seguito, analogamente a quanto accade per i k-archi piani, si deve distinguere il caso in cui sia $q\equiv 0 \pmod n$ da quello nel quale invece risulta $q\not\equiv 0 \pmod n$.

Mostriamo dapprima come per $q\not\equiv 0 \pmod n$ il limite superiore fornito per k dalla (1) possa ancora essere migliorato.

Per riconoscere ciò si indichi con Q un punto del piano S_q non appartenente a K. Essendo $(n-1)q\not\equiv 0 \pmod n$ esiste almeno una tangente di K che passa per Q, e se ripetiamo partendo da uno dei punti di K situati su questa tangente il computo che abbiamo fatto sopra partendo da P, troviamo che i punti di K sono in numero minore od eguale a $(n-1)(q+1)$.

Supponiamo ora che K sia un $\{(n-1)(q+1);\, n\}$-arco di S_q. In un suo punto qualsiasi, P, esiste una sola retta tangente, e poichè su ogni tangente stanno precisamente $n-1$ punti di K, questo possiede $q+1$ tangenti. Notiamo anche che da un punto *esterno* escono almeno due tangenti di K. Infatti se vi fosse un punto non appartenente a K e situato su una sola tangente di K, dovrebbe risultare:

$$(n-1)(q+1)-(n-1)=(n-1)q\equiv 0 \pmod n,$$

cioè:

$$q\equiv 0 \pmod n,$$

mentre abbiamo supposto che sia $q\not\equiv 0 \pmod n$.

La circostanza ora rilevata ha come conseguenza che esistono nel piano punti *interni* rispetto a K. Infatti, detta r una secante di K per ciascuno degli n punti in cui r incontra K passa una tangente di K. Le restanti $q-n+1$ tangenti incontrano r in punti *esterni* a K, e quindi da ciascuno di questi ne escono almeno due. Ma allora, poichè i punti di r che non appartengono a K sono proprio $q-n+1$, fra questi ne esistono alcuni dai quali non esce nessuna tangente a K.

([5]) Cfr., p. es.: B. Qvist [2], pag. 8, Teor. 2, pag. 10, 4°; B. Segre [4], pag. 360, Teorema II.

Si ha quindi:

$$(n-1)(q+1) \equiv 0 \pmod{n},$$

da cui:

$$q+1 \equiv 0 \pmod{n}. \tag{2}$$

Osserviamo ora che se da un punto esterno a K escono $i+1$ tangenti di K deve risultare:

$$(n-1)(q+1)-(n-1)(i+1)=(n-1)(q-i) \equiv 0 \pmod{n},$$

e quindi:

$$q-i \equiv 0 \pmod{n}. \tag{3}$$

Ma la (2) porta come conseguenza che la (3) può essere soddisfatta solo per $i=mn-1$, con m intero, e cioè dal punto comune a due tangenti ne escono o n, oppure un numero multiplo di n. Sia allora t una tangente di K. Per ciascuno dei $q-n+2$ punti di essa che non appartengono a K escono, oltre la t stessa, almeno altre $n-1$ tangenti. Ma poichè le tangenti di K sono $q+1$ si avrà:

$$(n-1)(q-n+2) \leq q.$$

Quando sia $n>2$ questa è soddisfatta solo se $n \geq q+1$; cioè *per* $q \not\equiv 0 \pmod{n}$ *e* $2<n \leq q$ *non esistono nemmeno* $\{ (n-1)(q+1) ; n \}$*-archi, e quindi il massimo valore di* k *per cui si possa avere un* $\{ k ; n \}$*-arco è* $k=(n-1)q+n-2$.

Per $q=4$ e $n=3$ si ottiene un esempio di $\{ 9 ; 3 \}$-arco togliendo dai 21 punti del piano i 12 punti che appartengono a tre rette non passanti per un medesimo punto. Poichè ogni retta contiene cinque punti, ed incontra in punti distinti almeno due delle rette che sono state cancellate, fra i nove punti rimasti non ve ne possono mai essere quattro allineati.

In modo analogo, quando sia $q=5$ e $n=3$ si ottiene un $\{ 11 ; 3 \}$-arco cancellando dal piano cinque rette, di cui mai tre passino per un medesimo punto ([6]). Dai 31 punti del piano si sopprimono così 20 punti, ed è ovvio che fra i rimanenti 11 punti non se ne trovano quattro allineati.

Resta da vedere se la limitazione ottenuta non possa ancora essere migliorata per valori diversi di q e di n.

([6]) Si riconosce subito che un tale insieme di cinque rette esiste effettivamente. Dopo aver scelto quattro rette di cui mai tre passino per uno stesso punto, basta prendere la quinta retta, r, in modo che passi per un punto, A, di una, a, di quelle non situato sulle altre tre, e che sia diversa dalla a e dalle congiungenti A con i tre punti comuni alle altre tre rette. Poichè da ogni punto escono sei rette, è evidente che la retta r esiste.

3. Passiamo ora al caso in cui è $q \equiv 0 \pmod{n}$. Se risulta addirittura $q = n$ il valore di k fornito dalla (1) dà la soluzione del problema che ci siamo posti nel n. 1. Infatti se togliamo dai $q^2 + q + 1$ punti del piano quelli di una retta, resta un insieme di q^2 punti che costituisce un $\{(n-1)q + n;\ n\}$-arco. Per $q \neq n$ non siamo invece in grado di indicare se esistano o no tali archi.

Nel seguito di questo numero diamo un risultato che costituisce un' immediata estensione ai $\{k;\ n\}$-archi con $k = (n-1)(q+1)$ e $q \equiv 0 \pmod{n}$, di una proprietà nota nel caso $n = 2$ (7).

Analogamente a quanto si fa per i k-archi (8) chiameremo $\{k;\ n\}$-arco *completo* un $\{k;\ n\}$-arco che non sia contenuto in un $\{k';\ n\}$-arco con $k' > k$. Si riconosce facilmente che *per* $q \equiv 0 \pmod{n}$ *non esistono* $\{(n-1)(q+1);\ n\}$-*archi completi.*

Per questo basterà ripetere la dimostrazione che si fa nel caso $n = 2$. È sufficiente osservare che, se $q \equiv 0 \pmod{n}$, le $q + 1$ tangenti di un $\{(n-1)(q+1);\ n\}$-arco, K, si incontrano tutte in un medesimo punto: aggiungendo questo ai punti di K si ottiene un $\{(n-1)q + n;\ n\}$-arco che contiene K, onde K non è più completo. A tal fine, si considerino una secante, r, di K e un qualunque punto, Q, di essa non appartenente a K. Poichè è $(n-1)(q+1) \not\equiv 0 \pmod{n}$, per Q deve passare almeno una tangente di K. Ma i punti di r sono tanti quante le tangenti di K, e dato che per ciascuno di essi ne deve passare almeno una, per ogni punto di r ne passa esattamente una. Per il punto d' incontro di due tangenti non può allora uscire nessuna secante di K e ne segue quindi l' asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. LOMBARDO-RADICE, *Sul problema dei* k-*archi completi in* $S_{2,q}$, « Bollettino dell' U. M. I. (3), 1956, pp. 178-181.

[2] B. QVIST, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, « Annales Academiae Scientiarum Fennicae » (A). n. 134, Helsinki, 1952.

[3] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*. vol. I, Zanichelli, Bologna, 1948.

[4] B. SEGRE, *Curve razionali normali e* k-*archi negli spazi finiti*, « Annali di Matematica », (4), 39, 1955, pp. 357-379.

[5] G. ZAPPA, *Reticoli e geometrie finite*, Lezioni raccolte da G. ZACHER, Liguori, Napoli, 1952.

(7) Cfr. B. QVIST [2], pag. 10, teorema 5. Per una proprietà più generale si veda la nota (6) in B. SEGRE [4].

(8) Cfr. L. LOMBARDO-RADICE [1], pag. 178.