Bollettino
Unione Matematica Italiana

Bianca Manfredi

Su la genesi dei pluriderivatori.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 538–543.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_538_0>

Su la genesi dei pluriderivatori.

Nota di BIANCA MANFREDI (a Parma)

Sunto. - *Si mette in evidenza la naturale genesi dei pluriderivatori e si fa un'applicazione utile anche per un problema di Meccanica analitica.*

1. Introduzione.

In un precedente lavoro [3] (1) mi sono occupata degli operatori alle derivate parziali, del primo ordine, lineari e omogenei, della forma

$$(1)\quad \mathfrak{D}=X_0(t, x_1, \dots, x_n)\cdot\frac{\partial}{\partial t}+X_1(t, x_1, \dots, x_n)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+X_n(t, x_1, \dots, x_n)\cdot\frac{\partial}{\partial x_n},$$

dove

$$X_0(t, x_1, \dots, x_n),\ X_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots,\ X_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

sono date funzioni delle variabili indipendenti $t, x_1, \dots, x_n$.

Come è già stato proposto [2], questi operatori saranno anche qui richiamati con il nome di *pluriderivatori*.

In questa Nota *indico la naturale genesi di tali pluriderivatori*: ciò porta direttamente a stabilire per essi la decomposizione in prodotto di operazioni elementari che ho ottenuta, in modo completamente diverso, nel richiamato lavoro [3].

Ricordo che tale decomposizione mi ha permesso in un altro lavoro [4] di risolvere una classe di equazioni alle derivate parziali, del secondo ordine, lineari e a coefficienti costanti (*equazioni riducibili*), nella quale rientrano le classiche equazioni di LAPLACE e di POISSON.

Osservo qui (n. 3) che tale decomposizione implica la risoluzione di un sistema normale di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, che, com'è noto ([1], pag. 481), può ricondursi ad un sistema canonico per un'opportuna scelta della funzione Hamiltoniana (2). Sotto questo punto di vista detta decomposizione viene quindi ad avere interesse anche in campi meccanici e fisici-matematici.

(1) I numeri in parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

(2) Secondo il metodo di LIOUVILLE, per esempio, il sistema di equa-

2. Genesi dei pluriderivatori e loro decomposizione in prodotto di operazioni elementari.

I coefficienti $X_0(t, x_1, \dots, x_n)$, $X_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, X_n(t, x_1, \dots, x_n)$ del pluriderivatore (1) siano funzioni continue insieme alle loro derivate parziali prime in un certo campo R; inoltre il coefficiente $X_0(t, x_1, \dots, x_n)$ sia sempre non nullo. In tal caso non vi è restrizione a porre

$$(1') \qquad \mathfrak{D} = \frac{\partial}{\partial t} + X_1(t, x_1, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n(t, x_1, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Posto, per brevità,

$$(2) \qquad \frac{\partial z(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial t} = z_t, \qquad \frac{\partial z(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = z_i \qquad (i = 1, \dots, n),$$

si ha

$$(3) \qquad \mathfrak{D} z(t, x_1, \dots, x_n) = z_t + X_1(t, x_1, \dots, x_n) \cdot z_1 + \dots + X_n(t, x_1, \dots, x_n) \cdot z_n.$$

Se in $z(t, x_1, \dots, x_n)$ alle $x_1, \dots, x_n$ sostituisco delle funzioni $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$, derivabili, risulta:

$$(4) \qquad \frac{d}{dt} z(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = z_t(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) + \dot{x}_1(t) \cdot z_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) + \dots + \dot{x}_n(t) \cdot z_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

zioni differenziali ordinarie del primo ordine della forma

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

quando si introducano le n variabili ausiliarie $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ e si assuma la seguente funzione Hamiltoniana $H = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot x_{n+i}$, si trasforma nel sistema canonico seguente

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x_{n+i}} \\[2ex] \dfrac{dx_{n+i}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, n),$$

dove le equazioni $\dfrac{dx_{n-i}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ servono a definire le variabili ausiliarie x_{n+i} $(i = 1, \dots, n)$.

con

$$dx_i(t)/dt = \dot{x}_i(t) \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Si nota che il secondo membro di (4) ha una forma analoga al secondo membro di (3) e viene ad approssimarsi maggiormente al secondo membro di (3) prendendo $x_1(t), \dots, x_n(t)$ in modo che si abbia

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{5}$$

come ora passiamo a mostrare.

Le ipotesi fatte sulle funzioni

$$X_i(t, x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

assicurano ([5], pp. 27-35) l'esistenza della soluzione generale del sistema differenziale (5), cioè l'esistenza di un sistema di funzioni

$$x_i = \xi_i(t, c_1, \dots, c_n) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{6}$$

tali che, per ogni valore delle costanti $c_1, \dots, c_n$ [in modo però che il punto $(t, x_1, \dots, x_n)$ appartenga ad R], sia

$$\dot{\xi}_i(t, c_1, \dots, c_n) = X_i(t, \xi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \xi_n(t, c_1, \dots, c_n)) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Sostituendo allora in (4) alle $x_1(t), \dots, x_n(t)$ ordinatamente tali funzioni (6), si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} z(t, \xi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \xi_n(t, c_1, \dots, c_n)) = \tag{4'}$$

$$= z_t(t, \xi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \xi_n(t, c_1, \dots, c_n)) +$$
$$+ X_1(t, \xi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \xi_n(t, c_1, \dots, c_n)) \cdot$$
$$\cdot z_1(t, \xi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \xi_n(t, c_1, \dots, c_n)) +$$
$$+ \dots + X_n(t, \xi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \xi_n(t, c_1, \dots, c_n)) \cdot$$
$$\cdot z_n(t, \xi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \xi_n(t, c_1, \dots, c_n)).$$

Ricavando dalle (6), ciò che è possibile (3), le costanti $c_1, \dots, c_n$, si abbia

$$c_i = \bar{\xi}_i(t, x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{6'}$$

(3) Infatti è ([5], pag. 35) $\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)/\partial(c_1, \dots, c_n) = 1$.

Allora le (6) ci dànno

$$x_i = \xi_i(t, \bar{\xi}_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \bar{\xi}_n(t, x_1, \dots, x_n)) \quad (i = 1, \dots, n). \tag{7}$$

Indicando poi ([3], pag. 383)

$$\left\{ \begin{matrix} c_1 & \dots & c_n \\ \bar{\xi}_1(t, x_1, \dots, x_n) & \dots & \bar{\xi}_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right\} \tag{8}$$

l'operazione di sostituzione di $c_1, \dots, c_n$ ordinatamente con

$$\bar{\xi}_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \bar{\xi}_n(t, x_1, \dots, x_n),$$

la (7) si può scrivere

$$x_i = \left\{ \begin{matrix} c_1 & \dots & c_n \\ \bar{\xi}_1(t, x_1, \dots, x_n) & \dots & \bar{\xi}_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right\} \xi_i(t, c_1, \dots, c_n).$$

Se ad ambo i membri di (4′) si applica la sostituzione (8), risulta

$$\left\{ \begin{matrix} c_1 & \dots & c_n \\ \bar{\xi}_1(t, x_1, \dots, x_n) & \dots & \bar{\xi}_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial t} z(t, \xi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \xi_n(t, c_1, \dots, c_n)) = \tag{4''}$$

$$= z_t(t, x_1, \dots, x_n) + X_1(t, x_1, \dots, x_n) \cdot z_1(t, x_1, \dots, x_n) + \dots +$$

$$+ X_n(t, x_1, \dots, x_n) \cdot z_n(t, x_1, \dots, x_n),$$

dove il secondo membro coincide proprio con il secondo membro di (3).

La (3) si può scrivere allora

$$\mathfrak{D} z(t, x_1, \dots, x_n) = \tag{9}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} c_1 & \dots & c_n \\ \bar{\xi}_1(t, x_1, \dots, x_n) & \dots & \bar{\xi}_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial t} z(t, \xi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \xi_n(t, c_1, \dots, c_n)),$$

od anche sostituendo ordinatamente $c_1, \dots, c_n$ con $x_1, \dots, x_n$ (il che è un puro cambiamento di nomi):

$$\mathfrak{D} z(t, x_1, \dots, x_n) = \tag{9'}$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ \bar{\xi}_1(t, x_1, \dots, x_n) & \dots & \bar{\xi}_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial t} z(t, \xi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \xi_n(t, x_1, \dots, x_n)),$$

oppure

$$(9'') \qquad \mathfrak{D}z(t, x_1, \dots, x_n) =$$

$$\underleftarrow{\left\{ \begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ \overline{\xi}_1(t, x_1, \dots, x_n) & \dots & \overline{\xi}_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ \xi_1(t, x_1, \dots, x_n) & \dots & \xi_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right\} z,}$$

essendo $z = z(t, x_1, \dots, x_n)$.

Dunque *il pluriderivatore* (1′) *è uguale al prodotto di tre operazioni elementari* nell'ordine indicato dalla freccia.

Si nota poi, facilmente, che *le due sostituzioni figuranti in* (9″) *sono fra loro inverse.*

3. - **Applicazione.**

Come applicazione della precedente decomposizione posso indicare, su un esempio, come sia possibile ottenere l'integrale generale di un'equazione alle derivate parziali del primo ordine e lineare.

Sia da risolvere l'equazione:

$$(10) \quad \frac{\partial z}{\partial t} + x_4 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_5 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_6 \frac{\partial z}{\partial x_3} - \mu^2 \left(x_1 \frac{\partial z}{\partial x_4} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_5} + x_3 \frac{\partial z}{\partial x_6} \right) = f(t),$$

dove $f(t)$ è una funzione che supponiamo integrabile e μ una data costante.

Il sistema differenziale normale (5) è ora

$$(5') \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = -\mu^2 x_1 \\ \dot{x}_5 = -\mu^2 x_2 \\ \dot{x}_6 = -\mu^2 x_3 , \end{cases}$$

coincidente con il sistema canonico di funzione Hamiltoniana

$$H = \frac{\mu^2}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{1}{2} (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2),$$

che caratterizza, per esempio, in un S_3, il moto di un punto libero di massa unitaria attratto da un punto fisso con una forza proporzionale alla distanza.

Da (5′) si trova facilmente

$$\mu\xi_1 = c_1 \cos \mu t + c_4 \operatorname{sen} \mu t\,; \quad \mu\xi_2 = c_2 \cos \mu t + c_5 \operatorname{sen} \mu t\,;$$

$$\mu\xi_3 = c_3 \cos \mu t + c_6 \operatorname{sen} \mu t,$$

$$\xi_4 = c_4 \cos \mu t - c_1 \operatorname{sen} \mu t\,; \quad \xi_5 = c_5 \cos \mu t - c_2 \operatorname{sen} \mu t\,;$$

$$\xi_6 = c_6 \cos \mu t - c_3 \operatorname{sen} \mu t.$$

Si avrà allora

$$(11')\qquad \begin{gathered} \bar\xi_1 = \mu x_1 \cos \mu t - x_4 \operatorname{sen} \mu t\,; \quad \bar\xi_2 = \mu x_2 \cos \mu t - x_5 \operatorname{sen} \mu t\,; \\ \bar\xi_3 = \mu x_3 \cos \mu t - x_6 \operatorname{sen} \mu t\,; \\ \bar\xi_4 = x_4 \cos \mu t + \mu x_1 \operatorname{sen} \mu t\,; \quad \bar\xi_5 = x_5 \cos \mu t + \mu x_2 \operatorname{sen} \mu t\,; \\ \bar\xi_6 = x_6 \cos \mu t + \mu x_3 \operatorname{sen} \mu t. \end{gathered}$$

La (9″) ci dà

$$z(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_6) = \begin{Bmatrix} x_1 & \ldots & x_6 \\ \bar\xi_1 & \ldots & \bar\xi_6 \end{Bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} f(t),$$

dove le $\bar\xi_1, \ldots, \bar\xi_6$ hanno l'espressione (11′).

Si trova così

$$(12)\qquad z(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_6) = \int f(t)dt + \Omega\,(\bar\xi_1,\ \ldots,\ \bar\xi_6),$$

essendo Ω simbolo di funzione arbitraria.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Appell, *Traité de Mécanique rationelle*, t. 2, Gauthier-Villars, Paris (1911).

[2] A. Mambriani, *La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali* [Comunicazione al 5° Congresso della Unione Matematica Italiana, Pavia - Torino (6-12 ottobre 1955)], Riv. Mat. Univ. Parma, 6 (1955), 321-348.

[3] B. Manfredi, *Decomposizione in prodotto di operazioni elementari delle espressioni alle derivate parziali del primo ordine e totalmente lineari*, Boll. Un. Mat. It. (3) 4 (1949), 381-390.

[4] B. Manfredi, *Su la risoluzione delle equazioni alle derivate parziali, del second'ordine, lineari e a coefficienti costanti*, Riv. Mat. Univ. Parma, 3 (1952), 91-95.

[5] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, t. 1° (2ª ed.), Zanichelli, Bologna (1948).