# Bollettino Unione Matematica Italiana



Francesco Speranza


## Applicabilità proiettiva fra trasformazioni puntuali di $2^{a}$ specie.


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **11** (1956), n.4, p. 526–537.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_526_0>

# Applicabilità proiettiva fra trasformazioni puntuali di $2^a$ specie.

Nota di Francesco Speranza (a Bologna)

**Sunto.** - *Come al n.* 1.

**1.** Il Villa ha introdotto, in una Nota che appare in questo stesso fascicolo, la nozione di applicabilità proiettiva per le superficie di $2^a$ specie poste sulla $V_4$ di Segre; in particolare ha considerato quelle applicabilità proiettive da lui chiamate forti e inverse [1].

Nel presente lavoro vengono espressi tali concetti introdotti dal Villa per le trasformazioni puntuali di $2^a$ specie fra piani, direttamente senza ricorrere alle superficie (di $2^a$ specie) loro immagini sulla $V_4$ di Segre. Si danno inoltre le condizioni analitiche per l'applicabilità proiettiva nei vari casi.

**2.** Siano $S$, $S^*$ due superficie di $2^a$ specie della $V_4$ di Segre (cioè $S$, $S^*$ siano le immagini di due trasformazioni $T$, $T^*$ di $2^a$ specie rispettivamente fra i piani $\pi_1$, $\pi_2$ e i piani $\pi_1^*$, $\pi_2^*$) e sia assegnata fra di esse un'applicabilità proiettiva. Dimostriamo che:

*Un' applicabilità proiettiva fra due superficie* S, S* *è l' immagine di una corrispondenza* $\Delta$ *fra* T *e* T*, *consistente in una trasformazione* $U_1$ *fra* $\pi_1$ *e* $\pi_1^*$ *ed in una trasformazione* $U_2$ *fra* $\pi_2$ *e* $\pi_2^*$, *nelle quali:* 1) *le curve caratteristiche doppie (semplici) di* T *corrispondono alle curve caratteristiche doppie (sèmplici) di* T*; 2) *le curve caratteristiche di* T, T* *nei quattro piani sono caratteristiche per* $U_1$, $U_2$; *e viceversa.*

Infatti, un' applicabilità proiettiva fra $S$, $S^*$ è una corrispondenza quasi-asintotica, e quindi $\Delta$ muta le curve caratteristiche doppie (semplici) di $T$ nelle caratteristiche doppie (semplici) di $T^*$. Siano inoltre $(A, B)$, $(A^*, B^*)$ due generiche coppie di punti corrispondentisi rispettivamente in $T$, $T^*$ (e tali che $A$ e $A^*$ si corrispondano in $U_1$, $B$ e $B^*$ in $U_2$). Tali coppie hanno per immagine sulla varietà di Segre due punti: $P$ (di $S$) e $P^*$ (di $S^*$). Nella coppia $P$, $P^*$ esiste un' omografia $K$ per la quale le due direzioni quasi-asintotiche di $S$, $S^*$ sono caratteristiche; allora, in ciascuna delle coppie $(A, A^*)$, $(B, B^*)$ vi è un' omografia — fra $\pi_1$ e $\pi_1^*$, $\pi_2$ e $\pi_2^*$ rispettivamente — tangente ad $U_1$, o ad $U_2$, per la quale

[1] M. Villa, *Applicabilità proiettiva fra superficie di $2^a$ specie della* $V_4$ *di Segre*, « questo Bollettino », p. 493.

le direzioni caratteristiche di $T$, $T^*$ sono caratteristiche ([2]). Le direzioni caratteristiche di $T$, $T^*$ sono quindi tali anche per $U_1$, $U_2$, e, per quanto dimostrato più sopra, anche le curve caratteristiche di $T$, $T^*$ sono tali per $U_1$, $U_2$.

Viceversa, se è soddisfatta la condizione 1) la corrispondenza fra $S$, $S^*$ è quasi–asintotica. Inoltre, in relazione ad una generica coppia $A$, $A^*$ ($B$, $B^*$) di punti corrispondenti in $U_1(U_2)$ esiste un' omografia *caratteristica* $K_1(K_2)$, per la quale le direzioni caratteristiche uscenti da $A$, $A^*$ ($B$, $B^*$) sono principali. Le omografie $K_1$, $K_2$ hanno per immagine un' omografia $K$ ([3]), per la quale le direzioni quasi-asintotiche di $S$, $S^*$ uscenti da $P$, $P^*$ sono principali, e quindi caratteristiche ([4]) ([5]).

Una corrispondenza fra le trasformazioni $T$, $T^*$ soddisfacente alle condizioni 1), 2), si dirà col VILLA applicabilità proiettiva.

**3.** Cerchiamo ora la condizione analitica per l' applicabilità di due trasformazioni puntuali di 2ª specie. Per individuare una trasformazione puntuale $T$ fra due piani $\pi_1$, $\pi_2$ occorre assegnare le coordinate di due punti corrispondenti $A$, $B$ in funzione di due parametri $u$, $v$. Siano ($A_0$, $A_1$, $A_2$), ($B_0$, $B_1$, $B_2$) le terne di punti fondamentali dei riferimenti mobili in $\pi_1$, $\pi_2$ rispettivamente; si ha

$$dA_i = \sum_0^2{}_k\, \omega_{ik} A_k \qquad dB = \sum_0^2{}_k\, \bar\omega_{ik} B_k$$

essendo $\omega_{ik}$, $\bar\omega_{ik}$ forme di PFAFF nei differenziali dei parametri dai quali dipendono i riferimenti.

Posto

$$\tau_{ik} = \bar\omega_{ik} - \omega_{ik}$$

([2]) Cfr. M. VILLA - L. MURACCHINI, *Sulle corrispondenze fra superficie della varietà di Segre*, «Revista de la Unión Matemática Argentina y de la Asociación Física Argentina», vol. XVII in onore di BEPPO LEVI, p. 329 (1955).

([3]) Cfr. M. VILLA - L. MURACCHINI, *L'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali*, «Boll. Un. Mat. Ital.» (3), 10, 313-327 (1955), nota ([9]).

([4]) Per queste nozioni si veda: M. VILLA - L. MURACCHINI, op. cit. in ([3]), n. 2.

([5]) La definizione di applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali che si trova in L. MURACCHINI, *Sulla deformazione proiettiva delle trasformazioni puntuali*, «Boll. Un. Mat. Ital.», (3), 7, 29-38 (1952), conduce, per le trasformazioni di 2ª specie, all'applicabilità qui considerata. Nel lavoro cit. si suppone però sempre che le trasformazioni siano di 1ª specie.

per i differenziali esterni delle forme $\omega_{ik}$, $\tau_{ik}$ valgono le:

$$[d\omega_{ik}] = \sum_0^2{}_j [\omega_{ij}\omega_{jk}]$$

$$[d\tau_{ik}] = \sum_0^2{}_j \{[\tau_{ij}\tau_{jk}] + [\tau_{ij}\omega_{jk}] + [\omega_{ij}\tau_{jk}]\}.$$

Se si impone che $A_0 \equiv A$, $B_0 \equiv B$, e che le terne $(A, A_1, A_2)$, $(B, B_1, B_2)$ si corrispondano in un'omografia $K_0$ tangente a $T$, si ha

$$\tau_{01} = \tau_{02} = 0. \tag{1}$$

Posto allora $\omega_{01}(= \bar{\omega}_{01}) = \omega_1$, $\omega_{02}(= \bar{\omega}_{02}) = \omega_2$, differenziando esteriormente le (1) si ha che

$$\tag{2} \begin{aligned} \tau_{11} - \tau_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_1} & \tau_{12} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_1} \\ \tau_{21} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_2} & \tau_{22} - \tau_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_2} \end{aligned}$$

essendo $\Omega_1$, $\Omega_2$ due forme quadratiche in $\omega_1$, $\omega_2$.

Con opportuna scelta dei riferimenti (in particolare, s'impone che le rette $AA_1$, $BB_1$ — cioè le rette $\omega_2 = 0$ — siano le rette caratteristiche doppie uscenti da $A$, $B$, e che $AA_2$, $BB_2$ — cioè le rette $\omega_1 = 0$ — siano le rette caratteristiche semplici; inoltre che l'omografia $K_0$ sia caratteristica) le (2) si possono così normalizzare

$$\tag{2'} \begin{aligned} \tau_{11} - \tau_{00} &= -\omega_2 & \tau_{12} &= 0 \\ \tau_{21} &= -\omega_1 & \tau_{22} - \tau_{00} &= 0. \end{aligned}$$

Per differenziazione esterna si ha che, dette $\Theta_1$, $\Theta_2$ due forme cubiche:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \alpha_{30}\omega_1^3 + 3\alpha_{21}\omega_1^2\omega_2 + 3\alpha_{12}\omega_1\omega_2^2 + \alpha_{03}\omega_2^3 \\ \Theta_2 &= 3\beta_{12}\omega_1\omega_2^2 + \beta_{03}\omega_2^3 \end{aligned}$$

valgono le:

$$\tag{3} \begin{aligned} 2\tau_{10} - 2\omega_{12} &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \omega_1^2} \\ \tau_{20} + \omega_{00} - \omega_{22} &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} & \tau_{10} + \omega_{12} &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \\ -2\omega_{21} + \omega_1 &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \omega_2^2} & 2\tau_{20} &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \omega_2^2}. \end{aligned}$$

Indichiamo con $\delta$ un simbolo di differenziazione rispetto al quale $\delta u = \delta v = 0$. Posto $\varepsilon_{ik} = \omega_{ik}(\delta)$, si ha

$$(4)\quad \begin{cases} \delta\alpha_{30} = 2\alpha_{30}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{00}) & \delta\alpha_{21} = \alpha_{21}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{00}) & \delta\alpha_{12} = -2\varepsilon_{20} \\ \delta\alpha_{03} = \alpha_{03}(\varepsilon_{00} - \varepsilon_{11}) & \delta\beta_{12} = \beta_{12}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{00}) + 2\varepsilon_{10} & \delta\beta_{03} = 0 \end{cases}$$

$\alpha_{30}$, $\alpha_{21}$, $\alpha_{03}$ sono quindi invarianti relativi; si hanno tre invarianti assoluti nell'intorno del 3° ordine, ad es. $\frac{\alpha_{21}^2}{\alpha_{30}}$, $\alpha_{21}\alpha_{03}$, $\beta_{03}$. Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè le curve caratteristiche doppie (semplici) siano rette è che sia $\alpha_{30} = 0$ ($\alpha_{03} = 0$).

Gli sviluppi in serie delle equazioni di $T$, nell'intorno di $A$, $B$, avendo assunto il sistema di riferimento come più sopra indicato, risultano ($x$, $y$ coordinate in $\pi_1$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ in $\pi_2$):

$$(5\quad \begin{cases} \bar{x} = x - xy - \frac{1}{6}[\alpha_{30}x^3 + 3\alpha_{21}x^2y + 3(\alpha_{12} - 1)xy^2 + \alpha_{03}y^3] + [4] \\ \bar{y} = y \qquad\qquad - \frac{1}{6}(3\beta_{12}xy^2 + \beta_{03}y^3) + [4]. \end{cases}$$

**4.** Sia ora assegnata, accanto alla $T$, una trasformazione puntuale $T^*$, pure di 2ª specie, fra i piani $\pi_1^*$ e $\pi_2^*$. Supponiamo che $T$ e $T^*$ siano applicabili, e siano $U_1$ ed $U_2 = T \cdot U_1 \cdot T^*$ le trasformazioni, rispettivamente fra $\pi_1$ e $\pi_1^*$, $\pi_2$ e $\pi_2^*$, che realizzano l'applicabilità.

Fissiamo in $\pi_1^*$, $\pi_2^*$ due sistemi di riferimento mobili in relazione a $T^*$, analogamente a quanto s'è fatto in $\pi_1$, $\pi_2$ in relazione a $T$. D'altra parte, essendo le due trasformazioni riferite in una corrispondenza che muta le direzioni caratteristiche di $T$ in quelle di $T^*$, si può far sì che i punti $A^*$, $A_1^*$, $A_2^*$ siano i corrispondenti dei punti $A$, $A_1$, $A_2$ in un'omografia tangente ad $U_1$ nella coppia $A$, $A^*$. Allora anche $B^*$, $B_1^*$, $B_2^*$ sono i corrispondenti di $B$, $B_1$, $B_2$ in un'omografia tangente ad $U_2$ in $B$, $B^*$. Ciò posto, per $T^*$ si hanno le relazioni

$$dA_i^* = \sum_0^2{}_k\, \omega_{ik}^* A_k \qquad dB_i^* = \sum_0^2{}_k\, \bar{\omega}_{ik}^* B_k^*$$

e, posto

$$\tau_{ik}^* = \bar{\omega}_{ik}^* - \omega_{ik}^*$$

si ha

$$(1^*)\qquad \tau_{01}^* = \tau_{02}^* = 0$$

$$(2^*)\qquad \begin{matrix} \tau_{11}^* - \tau_{00}^* = -\omega_2^* & \tau_{12}^* = 0 \\ \tau_{21}^* = -\omega_1^* & \tau_{22}^* - \tau_{00}^* = 0. \end{matrix}$$

Si ponga pure

$$\rho_{ik} = \omega_{ik}^* - \omega_{ik} \qquad \bar{\rho}_{ik} = \bar{\omega}_{ik}^* - \bar{\omega}_{ik}.$$

Per la relazione fra i riferimenti in $\pi_1$ e $\pi_1^*$:

$$\rho_{01} = \rho_{02} = 0 \tag{6}$$

dalle quali, per differenziazione esterna, si ha che esistono due forme quadratiche:

$$\Xi_1 = d_{11}\omega_1^2 + 2d_{12}\omega_1\omega_2 + d_{22}\omega_2^2$$

$$\Xi_2 = e_{11}\omega_1^2 + 2e_{12}\omega_1\omega_2 + e_{22}\omega_2^2$$

tali che [6]

$$\rho_{11} - \rho_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Xi_1}{\partial \omega_1} \qquad \rho_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Xi_2}{\partial \omega_1}$$

$$\rho_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Xi_1}{\partial \omega_2} \qquad \rho_{22} - \rho_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Xi_2}{\partial \omega_2}.$$

L' equazione delle direzioni caratteristiche di $T$, $T^*$ è

$$\omega_1\omega_2^2 = 0$$

e l' analoga relativa ad $U_1$, $U_2$ è

$$\begin{aligned} \Xi_2\omega_1 - \Xi_1\omega_2 \equiv e_{11}\omega_1^3 + (2e_{12} - d_{11})\omega_1^2\omega_2 + \\ + (e_{22} - 2d_{12})\omega_1\omega_2^2 - d_{22}\omega_2^3 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Affinchè la corrispondenza sia un' applicabilità, è necessario e sufficiente che le curve caratteristiche di $T$, $T^*$ siano tali per $U_1$, $U_2$; cioè dev' essere

$$e_{11} = d_{22} = 0$$

Affinchè $T$ e $T^*$ siano applicabili devono verificarsi insieme alle

(6) Ogni particolarità di $U_1$, relativa all'intorno del 2° ordine della coppia $A$, $A^*$, si presenta pure per $U_2$, in relazione alla coppia $B$, $B^*$ Infatti, essendo

$$\bar{\rho}_{ik} = \tau_{ik}^* + \rho_{ik} - \tau_{ik}$$

si ha, per le (2'), (2*), (6)

$$\bar{\rho}_{11} - \bar{\rho}_{00} = \rho_{11} - \rho_{00}; \ \bar{\rho}_{21} = \rho_{21}; \ \bar{\rho}_{12} = \rho_{12}; \ \bar{\rho}_{22} - \bar{\rho}_{00} = \rho_{22} - \rho_{00}.$$

Così, se $U_1$ è di 2ª specie, lo è pure $U_2$.

(2'), (2*), (6) le equazioni di PFAFF

$$
(8) \qquad \begin{array}{ll}
\rho_{11} - \rho_{00} = d_{11}\omega_1 + d_{12}\omega_2 & \rho_{12} \qquad = e_{12}\omega_2 \\
\rho_{21} \qquad = d_{12}\omega_1 & \rho_{22} - \rho_{00} = e_{12}\omega_1 + e_{22}\omega_2 \ (^7).
\end{array}
$$

Indicando con $\alpha^*$, $\beta^*$ i coefficienti relativi a $T^*$, analoghi ai coefficienti $\alpha$, $\beta$ relativi a $T$, per le (3), (8) si conclude:

*Condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità di* T, T* *è che:*

$$
(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l}
\alpha_{30} = \alpha_{30}^*, \quad \alpha_{21} = \alpha_{21}^*, \quad \alpha_{03} = \alpha_{03}^* \\
[\rho_{11} - \rho_{00}\,\omega_1] = \dfrac{\alpha_{12}^* - \alpha_{12}}{2}[\omega_1\omega_2] \ (^8)\ (^9).
\end{array} \right.
$$

**5.** Si osservi che alle trasformazioni si estende subito il teorema di CASTELNUOVO-BOMPIANI sull'applicabilità proiettiva fra superficie dello spazio ordinario [10].

Si ha:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè una corrispondenza* $\Delta$ *fra due trasformazioni puntuali* T, T* *(di 1ª o di 2ª specie) sia*

[7] I coefficienti $d_{ik}$, $e_{ik}$ delle (8) variano, al variare del riferimento mobile, secondo le:

$$
\begin{array}{ll}
\delta d_{11} = 2(\varepsilon_{10}^* - \varepsilon_{10}) + d_{11}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{00}) & \delta e_{12} = \varepsilon_{10}^* - \varepsilon_{10} + e_{12}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{00}) \\
\delta d_{12} = \varepsilon_{20}^* - \varepsilon_{20} & \delta e_{22} = 2(\varepsilon_{20}^* - \varepsilon_{20})
\end{array}
$$

dalle quali si deduce che $d_{11} - 2e_{12}$ è un invariante relativo, ed $e_{22} - 2d_{12}$ un invariante assoluto; come si vedrà, il loro annullarsi comporta che l'applicabilità sia rispettivamente una applicabilità forte e una applicabilità inversa.

[8] Mentre i coefficienti $\alpha_{30}$, $\alpha_{21}$, $\alpha_{03}$ sono invarianti relativi, i rapporti $\dfrac{\alpha_{30}}{\alpha_{30}^*}$, $\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{21}^*}$, $\dfrac{\alpha_{03}}{\alpha_{03}^*}$ sono invarianti assoluti. Ciò si deduce dalle (4) e dalle relazioni analoghe per $T^*$.

[9] Converrà tener presenti anche le seguenti

$$
(9_1) \qquad \alpha_{12} - \alpha_{12}^* = 2d_{12}; \quad \beta_{12} - \beta_{12}^* = -2e_{12}; \quad \beta_{03} - \beta_{03}^* = 2(2d_{12} - e_{22}).
$$

Con opportuna scelta dei riferimenti, si può sempre far sì che sia $\alpha_{12} = \alpha_{12}^*$, $\beta_{12} = \beta_{12}^*$ (cfr. le (4)). Il sistema (8) diviene allora

$$
(8') \qquad \begin{array}{ll}
\rho_{11} - \rho_{00} = d_{11}\omega_1 & \rho_{12} \qquad = 0 \\
\rho_{21} \qquad = 0 & \rho_{22} - \rho_{00} = \dfrac{\beta_{03}^* - \beta_{03}}{2}\,\omega_2
\end{array}
$$

$d_{11}$ è un invariante relativo, che si annulla se e solo se l'applicabilità è forte.

[10] Cfr. E. BOMPIANI, *Corrispondenza puntuale fra due superficie e rappresentazione conforme*, «Rend. Accad. Lincei», (5), $32_2$, 376-380 (1923).

*un' applicabilità proiettiva è che ogni coppia di* $E_2$ *inflessionali, corrispondenti in* T, *si trasformi in una coppia di* $E_2$ *inflessionali, corrispondenti in* T*.

Per le trasformazioni di 1ª specie, l'applicabilità s'intende definita come nel lavoro di M. VILLA e L. MURACCHINI citato nella (3).

**6.** Siano ora $S$, $S^*$ due superficie di 2ª specie della $V_4$ di SEGRE, fra le quali sia assegnata un'applicabilità proiettiva forte (11). Dimostriamo che:

*Un' applicabilità proiettiva forte fra* S, S* *è l'immagine di un'applicabilità fra* T *e* T*, *consistente in due trasformazioni* $U_1$, $U_2$ *di* 2ª *specie, le cui curve caratteristiche doppie (semplici) coincidono con le curve caratteristiche doppie (semplici) di* T, T* *nei quattro piani, e viceversa.* (12)

Siano

$$X_1 = x\bar{x},\ X_2 = x\bar{y},\ X_3 = \bar{x}y,\ X_4 = y\bar{y},\ X_5 = \bar{x},\ X_6 = \bar{y},\ X_7 = x,\ X_8 = y$$

$$X_1 = x^*\bar{x}^*,\ X_2 = x^*\bar{y}^*,\ X_3 = \bar{x}^*y^*,\ X_4 = y^*\bar{y}^*,\ X_5 = \bar{x}^*,\ X_6 = \bar{y}^*,$$
$$X_7 = x^*,\ X_8 = y^*,$$

le equazioni parametriche delle $V_4$ contenenti $S$, $S^*$.

Siano $K_1$, $K_2$ le omografie caratteristiche relative ad $U_1$, $U_2$ nelle coppie $(A, A^*)$, $(B, B^*)$ (n. 2). Le loro equazioni, come si può ricavare dalle (*), sono

$$K_1)\ \left\{\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{-\frac{1}{2}d_{11}x - \frac{1}{2}e_{22}y + 1} = \\ &= x + \frac{d_{11}}{2}x^2 + \frac{e_{22}}{2}xy + \frac{d_{11}^2}{4}x^3 + \frac{d_{11}e_{22}}{2}x^2y + \frac{e_{22}^2}{4}xy^2 + [4] \\ y^* &= \frac{y}{-\frac{1}{2}d_{11}x - \frac{1}{2}e_{22}y + 1} = \\ &= y + \frac{d_{11}}{2}xy + \frac{e_{22}}{2}y^2 + \frac{d_{11}^2}{4}x^2y + \frac{d_{11}e_{22}}{2}xy^2 + \frac{e_{22}^2}{4}y^3 + [4] \end{aligned}\right.$$

(11) Cfr. M. VILLA, op. cit. in (1).

(12) Nel seguito si utilizzeranno gli sviluppi locali della trasformazione $U_1$ fino ai termini di 3° grado:

$$(*)\qquad \left\{\begin{aligned} x^* &= x + \frac{d_{11}}{2}x^2 + d_{12}xy + \sum_{i+j=3} D_{ij}x^iy^j + [4] \\ y^* &= y + e_{12}xy + \frac{e_{22}}{2}y^2 + \sum_{i+j=3} E_{ij}x^iy^j + [4] \end{aligned}\right.$$

con $\qquad D_{03} = \frac{\alpha_{03}}{12}(2d_{12} - e_{22}),\quad E_{30} = \frac{\alpha_{30}}{24}(2e_{12} - d_{11}),$

ed analoghe per $K_2$. Esse hanno per immagine un'omografia $K$, nella quale si corrispondono le $V_4$.

Usufruendo delle (5), (*) e analoghe, si scrivono le equazioni di $S$:

$$(10)\quad \begin{cases} X_1 = x^2 + d_{11}x^3 + (2d_{12} - 1)x^2y + [4] \\ X_2 = xy + \left(\frac{1}{2}d_{11} + e_{12}\right)x^2y + \left(\frac{1}{2}e_{22} + d_{12}\right)xy^2 + [4] \\ X_3 = xy + \left(\frac{1}{2}d_{11} + e_{12}\right)x^2y + \left(\frac{1}{2}e_{22} + d_{12} - 1\right)xy^2 + [4] \\ X_4 = y^2 + 2e_{12}xy^2 + e_{22}y^3 + [4] \\ X_5 = x + \frac{1}{2}d_{11}x^2 + (d_{12} - 1)xy + \left(D_{30} - \frac{\alpha_{30}}{6}\right)x^3 + \ldots + \left(D_{03} - \frac{\alpha_{03}}{6}\right)y^3 + [4] \\ X_6 = y + e_{12}xy + \frac{1}{2}e_{22}y^2 + E_{30}x^3 + \ldots + \left(E_{03} - \frac{\beta_{03}^*}{6}\right)y^3 + [4] \\ X_7 = x + \frac{1}{2}d_{11}x^2 + d_{12}xy + D_{30}x^3 + \ldots + D_{03}y^3 + [4] \\ X_8 = y + e_{12}xy + \frac{1}{2}e_{22}y^2 + E_{30}x^3 + \ldots + E_{03}y^3 + [4]. \end{cases}$$

Analogamente si hanno le equazioni parametriche di $KS^*$:

$$\begin{cases} X_1 = x^2 + d_{11}x^3 + (e_{22} - 1)x^2y + [4] \\ X_2 = xy + d_{11}x^2y + e_{22}xy^2 + [4] \\ X_3 = xy + d_{11}x^2y + (e_{22} - 1)xy^2 + [4] \\ X_4 = y^2 + d_{11}xy^2 + e_{22}y^3 + [4] \\ X_5 = x + \frac{1}{2}d_{11}x^2 + \left(\frac{1}{2}e_{22} - 1\right)xy + \left(\frac{1}{4}d_{11}^2 - \frac{\alpha_{30}}{6}\right)x^3 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{03}}{6}\right)y^3 + [4] \\ X_6 = y + \frac{1}{2}d_{11}xy + \frac{1}{2}e_{22}y^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots + \left(-\frac{\beta_{03}^*}{6} + \frac{1}{4}e_{22}^2\right)y^3 + [4] \\ X_7 = x + \frac{1}{2}d_{11}x^2 + \frac{1}{2}e_{22}xy + \frac{1}{4}d_{11}^2x^3 + \ldots + 0 \cdot y^3 + [4] \\ X_8 = y + \frac{1}{2}d_{11}xy + \frac{1}{2}e_{22}y^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots + \frac{1}{4}e_{22}^2y^3 + [4]. \end{cases}$$

Sia $F$ una curva per $A$, tangente alla retta caratteristica doppia; essa ha l'equazione

$$(11)\qquad y = ax^2 + bx^3 + [4].$$

Siano $\bar{F}$ ed $F^*$ le sue corrispondenti in $T$, $U_1$; $\bar{F}^*$ la corrispondente in $T^*$ di $F^*$. Fra $F$ ed $\bar{F}$ ($F^*$ ed $\bar{F}^*$) la $T(T^*)$ subordina una corrispondenza, la cui immagine è una curva $C(C^*)$ di $S(S^*)$, tangente alla direzione quasi-asintotica doppia. Anzi, ogni curva $C(C^*)$, è immagine di una tale corrispondenza.

Sostituendo la (11) nelle (10) si hanno le equazioni parametriche della curva $C$, e da queste le equazioni in forma esplicita:

$$\begin{cases} X_1 = X_5^2 + [4] \quad X_2 = aX_5^3 + [4] \quad X_3 = aX_5^3 + [4] \quad X_4 = [4] \\ X_6 = aX_5^2 + (b + ae_{12} - ad_{11} + E_{30})X_5^3 + [4] \\ X_7 = \left(a + \frac{\alpha_{30}}{6}\right) X_5^3 + [4] \\ X_8 = aX_5^2 + (b + ae_{12} - ad_{11} + E_{30})X_5^3 + [4]. \end{cases}$$

Con procedimento analogo si trovano le equazioni di $KC^*$:

$$\begin{cases} X_1 = X_5^2 + [4] \quad X_2 = aX_5^3 + [4] \quad X_3 = aX_5^3 + [4] \quad X_4 = [4] \\ X_6 = aX_5^2 + \left(b - \frac{1}{2} ad_{11}\right) X_5^3 + [4] \\ X_7 = X_5 + \left(\frac{\alpha_{30}}{6} + a\right) X_5^3 + [4] \\ X_8 = aX_5^2 + \left(b - \frac{1}{2} ad_{11}\right) X_5^3 + [4]. \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le due curve abbiano in $P$ contatto geometrico del 3° ordine è che sia

$$(12) \qquad a\left(e_{12} - \frac{1}{2} d_{11}\right) + E_{30} \equiv \left(\frac{a}{2} + \frac{\alpha_{30}}{24}\right)(2e_{12} - d_{11}) = 0.$$

Se ciò deve avvenire per ogni curva tangente alla quasi-asintotica doppia — basta supporre che ciò accada a due curve aventi $E_2$ diversi — sarà

$$2e_{12} - d_{11} = 0.$$

Allora l'equazione (7) delle direzioni caratteristiche di $U_1$, $U_2$ si riduce a

$$\omega_1 \omega_2^2 = 0$$

e quindi coincide con l'analoga equazione di $T$, $T^*$; le trasformazioni $U_1$, $U_2$ sono quindi di 2ª specie, e le loro curve caratteristiche doppie (semplici) coincidono con le caratteristiche doppie (semplici) di $T$, $T^*$.

Viceversa, se ciò accade, vale la (12), e quindi le curve $C$, $KC^*$ hanno in $P$ contatto geometrico del 3° ordine.

Un' applicabilità proiettiva fra $T$, $T^*$ soddisfacente alle condizioni anzidette si dirà col VILLA applicabilità proiettiva *forte*.

7. Consideriamo, in questo numero, solo trasformazioni puntuali di $2^a$ specie per le quali

$$\alpha_{21} \neq 0.$$

In quest' ipotesi, si può porre

$$\alpha_{21} = 1, \qquad \alpha_{12} = \beta_{12} = 0. \tag{13}$$

I riferimenti sono così completamente individuati. Indichiamo con $\bar{\Omega}$, $\bar{\Theta}$ le forme $\Omega$, $\Theta$ normalizzate come al n. 3 e in questo numero; e sia

$$\omega_{11} - \omega_{00} = h\omega_1 + k\omega_2 .$$

Le quantità $\alpha_{30}$, $\alpha_{03}$, $\beta_{03}$, $h$, $k$ sono invarianti assoluti.

La forma differenziale fratta

$$\Phi = \frac{\bar{\Theta}_1\omega_1 + (\omega_{11} - \omega_{00})\omega_2{}^2(\omega_1 - \omega_2)}{\bar{\Omega}_1\omega_2} =$$

$$= \frac{\alpha_{30}\omega_1{}^4 + 3\omega_1{}^3\omega_2 + h\omega_1{}^2\omega_2{}^2 + (\alpha_{03} - h + k)\omega_1\omega_2{}^3 - k\omega_2{}^4}{-2\omega_1\omega_2{}^2}$$

è invariante; ad essa diamo il nome di *elemento lineare proiettivo* della trasformazione $T$.

Dimostriamo che:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè due trasformazioni di $2^a$ specie* T, T* *siano proiettivamente applicabili in senso forte è che esse abbiano lo stesso elemento lineare proiettivo* ([13]).

Dimostriamo che la condizione è necessaria. Infatti, se $T$, $T^*$ sono applicabili in senso forte, il sistema di PFAFF (8) diviene

$$\rho_{11} - \rho_{00} = 2e_{12}\omega_1 + d_{12}\omega_2 \qquad \rho_{12} = e_{12}\omega_2$$

$$\rho_{21} = d_{12}\omega_1 \qquad \rho_{22} - \rho_{00} = e_{12}\omega_1 + e_{22}\omega_2$$

Per le (9), ($9_1$) si hanno le condizioni

$$\begin{gathered} \alpha_{30} = \alpha_{30}{}^* \qquad \alpha_{21} = \alpha_{21}{}^* \qquad \alpha_{03} = \alpha_{03}{}^* \\ \rho_{11} - \rho_{00} = (\beta_{12}{}^* - \beta_{12})\omega_1 + \frac{1}{2}(\alpha_{12} - \alpha_{12}{}^*)\omega_2 \end{gathered} \tag{14}$$

([13]) Si può dimostrare che se due trasformazioni di $2^a$ specie, del tipo considerato in questo numero ($\alpha_{21} \neq 0$), sono applicabili, lo sono pure in senso forte. Quindi l' uguaglianza dell' elemento lineare proiettivo è necessaria, oltre che sufficiente, anche per l' applicabilità generica di $T$, $T^*$.

Considerata la forma

$$\Phi' = \frac{\bar{\Theta}_1}{\bar{\Omega}_1}$$

si verifica facilmente che l' eguaglianza delle forme $\Phi'$ è condizione necessaria (ma non sufficiente) affinchè due trasformazioni di $2^a$ specie siano applicabili. Anche nel caso escluso ($\alpha_{21} = 0$) si possono definire alcune forme differenziali che compiono l' ufficio qui svolto da $\Phi$.

Fissiamo il riferimento in $\pi_1^* (\pi_2^*)$, in modo che sia il corrispondente del riferimento in $\pi_1 (\pi_2)$ in un'omografia tangente ad $U_1 (U_2)$, per la quale valgano le (13) ed anche

$$(13') \qquad \alpha_{12}^* = \beta_{12}^* = 0.$$

Indicando con $h^*$, $k^*$ le quantità relative a $T^*$, analoghe ad $h$, $k$, per le posizioni (13), (13'), le (14) si possono scrivere

$$(14') \qquad \alpha_{30} = \alpha_{30}^* \qquad \alpha_{21}^* = 1 \qquad \alpha_{03} = \alpha_{03}^* \qquad h = h^* \qquad k = k^*.$$

Gli elementi lineari delle due trasformazioni sono quindi uguali.

Il sistema di Pfaff (8) diviene

$$(15) \qquad \begin{array}{ll} \rho_{11} - \rho_{00} = 0 & \rho_{12} = 0 \\ \rho_{21} \qquad = 0 & \rho_{22} - \rho_{00} = \dfrac{\beta_{03}^* - \beta_{03}}{2} \omega_2 . \end{array}$$

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente. Siano assegnate due trasformazioni $T$, $T^*$ e fra di esse una corrispondenza $\gamma$ tale che gli elementi lineari di $T$, $T^*$ relativi a coppie corrispondenti in $\gamma$ siano uguali Fissati per $T$, $T^*$ i riferimenti come nel n. 3 ed in questo numero, sarà, per le coppie corrispondenti in $\gamma$:

$$\frac{\alpha_{30}\omega_1^4 + 3\omega_1^3 \omega_2 + h\omega_1^2\omega_2^2 + (\alpha_{03} - h + k)\omega_1\omega_2^3 - k\omega_2^4}{2\omega_1\omega_2^2} =$$

$$= \frac{\alpha_{30}^*\omega_1^{*4} + 3\omega_1^{*3} \omega_2^* + h^*\omega_1^{*2} \omega_2^{*2} + (\alpha_{03}^* - h^* + k^*)\omega_1^*\omega_2^{*3} - k^* \omega_2^{*4}}{2\omega_1^*\omega_2^{*2}} .$$

Da questa uguaglianza scende anzitutto che deve aversi:

$$(16) \qquad \omega_1^* = \omega_1 \qquad \omega_2^* = \omega_2$$

ed anche le (14').

Per la scelta dei riferimenti sussistono le (2') e (2*). Differenziando le (16), per le (14') si hanno le (15), e quindi $T$ e $T^*$ sono applicabili in senso forte [14].

**8.** Si dimostra, in modo analogo a quello seguito per l'applicabilità forte, che: *un' applicabilità inversa fra due superficie di* $2^a$ *specie* S, S* *della* $V_4$ *di Segre* [15] *è l'immagine di un' applica-*

[14] Un esempio di trasformazioni applicabili (con $\alpha_{21} = 0$) è dato da due qualunque trasformazioni $T$, $T^*$, le cui curve caratteristiche sono rette di due fasci in ciascun piano; infatti $T$ e $T^*$ si possono così rappresentare:

$$T) \begin{cases} x = u \\ y = f(v) \end{cases} \begin{cases} \bar{x} = u \\ \bar{y} = g(v) \end{cases} \qquad T^* \begin{cases} x^* = \lambda(u) \\ y^* = \varphi(v) \end{cases} \begin{cases} \bar{x}^* = \lambda(u) \\ \bar{y}^* = \psi(v) \end{cases}$$

con $\lambda(u)$ funzione arbitraria (punti corrispondenti nell'applicabilità essendo dati dagli stessi valori di $u$, $v$). Se $\lambda(u) \equiv u$, l'applicabilità è forte. Tali trasformazioni sono quindi applicabili anche in senso forte.

[15] Cfr. M. Villa, op. cit. in [1].

*bilità fra le trasformazioni* T, T* (di cui $S$, $S^*$ sono l'immagine), *consistente in due trasformazioni* $U_1$, $U_2$ *di* $2^a$ *specie, le cui curve caratteristiche doppie (semplici) coincidono con le curve caratteristiche semplici (doppie) di* T, T* *nei quattro piani, e viceversa.*

Una tale corrispondenza fra le due trasformazioni si dirà col VILLA applicabilità inversa. Si noti come le applicabilità fra trasformazioni di $2^a$ specie formino un gruppo, del quale le applicabilità realizzate da trasformazioni $U_1$, $U_2$ di $2^a$ specie sono un sottogruppo. Le corrispondenze di questo sottogruppo sono appunto o applicabilità forti o applicabilità inverse.

**9.** Terminiamo indicando le condizioni analitiche per l'applicabilità inversa di due trasformazioni. Il sistema di PFAFF (8) diviene

$$\begin{cases} \rho_{11} - \rho_{00} = d_{11}\omega_1 + d_{12}\omega_2 & \rho_{12} = e_{12}\omega_2 \\ \rho_{21} = d_{12}\omega_1 & \rho_{22} - \rho_{00} = e_{12}\omega_1 + 2d_{12}\omega_2 \end{cases}$$

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè due trasformazioni di* $2^a$ *specie* T, T* *siano applicabili in modo inverso è che sia:*

$$\alpha_{30} = \alpha_{30}^*, \qquad \alpha_{21} = \alpha_{21}^*, \qquad \alpha_{03} = \alpha_{03}^*, \qquad \beta_{03} = \beta_{03}^*$$

e inoltre

$$[\rho_{11} - \rho_{00}\ \omega_1] = \frac{1}{2}(\alpha_{12}^* - \alpha_{12})[\omega_1\omega_2] \ \text{[16] [17]}.$$

[16] Se si pone $\alpha_{12} = \alpha_{12}^*$, $\beta_{12} = \beta_{12}^*$ il sistema di PFAFF relativo all'applicabilità inversa diviene

$$\begin{matrix} \rho_{11} - \rho_{00} = d_{11}\omega_1 & \rho_{12} = 0 \\ \rho_{21} = 0 & \rho_{22} - \rho_{00} = 0. \end{matrix}$$

Se $d_{11} = 0$, $U_1$ ed $U_2$ si riducono ad omografie.

Considerata la forma

$$\Phi'' = \frac{\alpha_{30}\omega_1^3 + 3(\alpha_{21} - \beta_{12})\omega_1^2\omega_2 + (3\alpha_{12} - \beta_{03})\omega_1\omega_2^2 + \alpha_{03}\omega_2^3}{2\omega_1\omega_2}$$

(analoga a quella considerata in M. VILLA - L. MURACCHINI, op. cit. in (3), n. 8), si ha che l'uguaglianza delle forme $\Phi''$ è condizione necessaria, ma non sufficiente, per l'applicabilità inversa di due trasformazioni puntuali di $2^a$ specie.

[17] Da queste condizioni si deduce che *condizione necessaria* (ma non sufficiente) *affinchè due trasformazioni di* $2^a$ *specie siano applicabili in modo inverso è che esse appartengano allo stesso tipo ed allo stesso sottotipo della classificazione adottata nel lavoro:* F. SPERANZA, *Classificazione delle trasformazioni puntuali di* $2^a$ *specie fra piani*, « Boll. Un. Mat. Ital. », questo vol., pagg. 210-216. In particolare si ha che una trasformazione quadratica di $2^a$ specie può essere applicata in modo inverso solo su un'altra trasformazione quadratrica di $2^a$ specie.