Bollettino Unione Matematica Italiana

Pol Burniat

Superficie algebriche di genere lineare grande.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 504–509.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_504_0>

Superficie algebriche di genere lineare grande.

Nota di POL BURNIAT (a Bruxelles) (*)

Suuto. - *In relazione con un risultato concernente le superficie algebriche* ($p^{(1)} \leq 8p_a + 10$) *dovuto a* ZAPPA, *diamo esempi di superficie con* $p^{(1)} = 8p_a + 9$ *per tutti i valori del genere geometrico* p_g[1].

Due anni fa, nel corso di ricerche suggerite dalla relazione di SEVERI

$$p^{(1)} \leq 8p_a + 2p_g + 11 - s,$$

(p_g, p_a, $p^{(1)}$ generi geometrico, aritmetico, lineare, s numero base della superficie privata di curve eccezionali) sono riuscito a costruire superficie per le quali

$$p^{(1)} = 8p_a + 9. \tag{1}$$

e $p_g = rs$, $r \geq 2$, $s \geq 2$. I sistemi canonici corrispondenti erano degenerati.

L'anno scorso, sotto certe ipotesi, ZAPPA dimostrò la relazione

$$p^{(1)} \leq 8p_a + 10. \tag{2}$$

Mi propongo di costruire, per tutti i valori del genere geometrico p_g, superficie col sistema canonico puro irriducibile soddisfacente la (1).

La locuzione « genere lineare grande » risulta relativa al limite superiore dato dalla (2).

1. Partiamo da un cono F di genere qualunque $\omega \geq 1$ e vertice O. Sia n il suo ordine. Senza restrizione birazionale, possiamo

(*) Conferenze tenute presso l'Istituto di Geometria « Luigi Cremona » dell'Università di Bologna, nei giorni 26 e 28 aprile 1956.

(1) G. ZAPPA, *Sopra una probabile diseguaglianza tra i caratteri invariantivi di una superficie algebrica*, « Rend. di Mat. e sue appl. », ser. V, vol. XIV, pp. 455-464 (1955).

supporre che le sue generatrici multiple siano doppie con piani tangenti distinti. Il loro numero δ è tale che

$$2\omega - 2 = n(n-2) - 2\delta.$$

Il sistema Σ dei coni d'ordine $2n-4$ biaggiunti a F, cioè passanti due volte per le rette doppie d di F, sega su F una serie lineare $g = g_{2n+4\omega-4}$ di generatrici. Σ contiene i coni formati con F e con un cono residuale libero d'ordine $n-4$. La serie g possiede dunque la dimensione

$$\binom{2n-2}{2} - 3\delta - 1 - \binom{n-2}{2} = 3\omega - 4 + 2n$$

e risulta completa.

La serie g ammette $2^{2\omega} - 1$ serie lineari metà $g_{n+2\omega-2}$ diverse dalla serie $g^* = g^*_{n+2\omega-2}$ segata su F dai coni d'ordine $n-2$ aggiunti a F. In Σ si può dunque scegliere, in infiniti modi, un cono φ toccante F secondo un gruppo di $2\omega - 2 + n$ generatrici non contenuto in g^*.

Sia ancora ψ un gruppo di $2\pi + 2$, $\pi \geq 1$, piani distinti appartenenti ad un fascio generico $|\mu|$ di asse m.

Ora, consideriamo il cono doppio $2F$ di sostegno F caratterizzato dalla curva di diramazione

$$E + 2A = F \cap f, \quad f = \varphi + \psi,$$

essendo la parte E (curva di diramazione effettiva) privata di componenti multiple e la parola « componente » essendo intesa nel suo senso birazionale.

Designamo con ΣM il gruppo di n punti $F \cap m$, con Σd il gruppo delle δ generatrici doppie di F, con G il gruppo delle $2\omega - 2 + n$ generatrici di contatto di φ con F e, col simbolo di un punto, la curvetta infinitesimale infinitamente vicina a questo punto su F. Vediamo subito che

$$A = (n-2)O + 2\Sigma d + G + (\pi + 1)\Sigma M.$$

2. Nello spazio ordinario, siano $F(x, y, z) = 0$ e $f(x, y, z) = 0$ le equazioni rispettive delle superficie F e f. Il cono doppio $2F$ appartiene alla classe della superficie F^0 le cui equazioni, nello spazio a quattro dimensioni dei punti di coordinate cartesiane

$x, y, z, u,$ sono

$$F(x, y, z) = 0, \quad u = \sqrt{f(x, y, z)}.$$

Il cono doppio $2F$ possiede una involuzione I d'ordine e d'imagine F. Ad ogni ente geometrico X di F corrisponde su $2F$ un ente composto con I e che rappresenteremo con X^0. In particolare, la curva E^0 rappresenta la curva U dei punti uniti di I contata due volte: $E^0 = 2U$.

Poniamo $2M$ l'ordine $2\pi + 2 + 2n - 4$ della superficie $\varphi + \psi$. Sia c la sezione piana generica di F. Le funzioni f e $\sqrt{f}$ sono razionali delle coordinate di un punto di F e $2F$ rispettivamente e inducono su queste superficie le equivalenze

$$E + 2A \equiv 2mc \quad , \quad E^0 + A^0 \equiv U + A^0 \equiv mc^0 \tag{3}$$

e conseguentemente,

$$E \equiv 2(mc - A) \quad , \quad U \equiv (mc - A)^0. \tag{4}$$

Designando con e una metà lineare $e \equiv mc - A$ di E, vediamo che

$$e^0 \equiv U. \tag{5}$$

Siano $|k|$ e $|k_0|$ i sistemi canonici impuri di F e $2F$. Introducendo la (5) nella relazione $k_0 \equiv k^0 + U$ di Enriques-Castelnuovo, otteniamo

$$k_0 \equiv k^0 + e^0 = (k + e)^0 \equiv (e')^0.$$

Il sistema canonico $|k_0|$ risulta quindi la combinazione lineare di quelli fra i sistemi lineari di curve $U + |k|^0$ ed $|e'|^0$ che sono effettivi. Attualmente, essendo il sistema $|k|$ virtuale (F è un cono), abbiamo

$$|k_0| = |e'|^0.$$

3. Cerchiamo una semplice espressione di $|e'|$.

Da ciò che precede risulta

$$e \equiv mc - A = (\pi + 1 + n - 2)c - (n - 2)O - \Sigma d - G - (\pi + 1)\Sigma M.$$

Siano c_1 e c_0 le sezioni di F con i piani del fascio $|\mu|$ e con i piani per O rispettivamente. Avremo

$$c_0 \equiv c - O \quad , \quad c_1 \equiv c - \Sigma M \tag{6}$$

e quindi

$$e \equiv (\pi + 1)c_1 + (n - 2)c_0 - 2\,\Sigma\, d - G.$$

La serie lineare di generatrici di F, $|(n-2)c_0 - 2\,\Sigma\, d\,|$, viene segata su questo cono dai suoi coni aggiunti d'ordine $n-2$. Dalla scelta del cono φ risulta che questa serie è distinta dalla serie dello stesso ordine $|\,G\,|$. La serie $|(n-2)c_0 - 2\,\Sigma\, d - G\,|$ è dunque una serie virtuale d'ordine zero che rappresenteremo con $|\,G_0\,|$. Si avrà conseguentemente

$$e \equiv (\pi + 1)c_1 + G_0,$$

$$e' \equiv \pi c_1 + c_1' + G_0.$$

Ma $c' \equiv c_1'$ e il sistema $|\,c'\,|$ viene virtualmente segato su F dalle superficie d'ordine $n-3$ passanti $n-2$ volte per O e semplicemente per le rette d doppie per F sicchè

$$c_1' \equiv c' \equiv (n-3)c - (n-2)O - 2\,\Sigma\, d \equiv (n-3)c_0 - 2\,\Sigma\, d - O.$$

Ora la serie lineare di generatrici di E, $|(n-3)c_0 - 2\,\Sigma\, d\,|$, determinata su questo cono dai suoi coni aggiunti d'ordine $n-3$ risulta la serie canonica $G^*_{2\omega-2}$ di generatrici di F. Conseguentemente,

$$e' \equiv \pi c_1 - O + G^*_{2\omega-2} + G_0.$$

Osserviamo che la serie lineare di generatrici $|\,G^*_{2\omega-2} - G_0\,|$ è una serie $g^{\omega-2}_{2\omega-2} = |\,G_{2\omega-2}\,|$ ben determinata e diversa dalla serie canonica. Il sistema $|\,c_1 - O\,|$ rappresenta la curva c_1 passante per O; più precisamente, il gruppo $\Sigma\, g_M$ delle n generatrici di F passanti per gli n punti M.

Insomma,

$$|\,k_0\,| = |\,e'\,|^0 = |\,(\pi - 1)c_1 + G_{2\omega-2} + \Sigma\, g_M\,|^0.$$

Una retta puntata g_M possiede il grado -1. La retta doppia g^0_M di $2F$ ha il grado -2 e, privata di diramazione, si spezza in due rette di grado -1, cioè in due rette eccezionali di prima specie. Queste ultime rette sono dunque parte fisse di $|\,k_0\,|$ e il sistema canonico puro $|\,\bar{k}_0\,|$ di $2F$ coincide col sistema

$$|\,\bar{k}_0\,| = |\,(\pi - 1)c_1 + G_{2\omega-2}\,|^0.$$

Che Σg_M sia parte fissa del sistema $|e'|$ si verifica anche subito osservando che il numero d'intersezioni $e' \cdot g_M$ vale -1.

Per $\pi \geq 1$, $\omega \geq 1$, $|\bar{k}_0|$ risulta virtuale d'ordine zero. Per $\pi > 1$, $\omega \geq 1$, $|\bar{k}_0|$ risulta ovviamente irriducibile.

4. Poichè $G_{2\omega-2}$ rappresenta $2\omega - 2$ generatrici di F, il sistema $|e'|$ possiede il grado

$$\nu = 2(\pi - 1)(2\omega - 2) = 4(\pi - 1)(\omega - 1)$$

e F possiede conseguentemente il genere lineare

$$p^{(1)} = 2\nu + 1 = 8(\pi - 1)(\omega - 1) + 1.$$

Per ottenere il genere geometrico p_g di $2F$, valutiamo la dimensione r del sistema $|e'|$.

Una c_1 possede il genere ω. Il sistema $|e'|$ sega su una c_1 una serie lineare $g_{2\omega-2}$. Questa serie è completa perchè $|e'|$ contiene parzialmente il sistema $|G_{2\omega-2}|$ che taglia su c_1 una $g_{2\omega-2}$ completa. Una c_1 presenta dunque $\omega - 1$ condizioni alle e' assogettate a contenerla. Giacchè $|G_{2\omega-2}| = |e' - (\pi - 1)c_1|$ possiede la dimensione $\omega - 2$, si trova subito che

$$r = (\pi - 1)(\omega - 1) + \omega - 2 = \pi(\omega - 1) - 1$$

$$p_g = r + 1 = \pi(\omega - 1).$$

Questo genere p_g può ovviamente prendere tutti i valori interi positivi.

Il cono doppio $2F$ possiede la irregolarità ω. Difatti, al fascio $|b|$ delle generatrici di F corrisponde su $2F$ un fascio $|b^0|$ di curve iperellittiche b^0 che, possedendo $2\pi + 2$ punti di diramazione sono di genere π.

In un altro modo, considerando la struttura del sistema canonico di $2F$, si trova che l'aggiunto $|(c_1{}^0)'|$ delle curve $c_1{}^0$, cioè il sistema $|c_1{}^0 + k_0|$ risulta la combinazione lineare di quelli fra i sistemi di curve

$$U + |c_1 + k|^0 = U + |c_1'|^0 \quad \text{e} \quad |c_1 + e'|^0 = |\pi c_1 + G_{2\omega-2}|^0 + \Sigma g_M^0$$

che sono effettivi. Il primo non è effettivo. Ragionando sul secondo come abbiamo già fatto a proposito del sistema $|e'|^0$, troviamo che possiede la dimensione $\pi(\omega - 1) + \omega - 2$. Ne risulta che questo sistema taglia su una $c_1{}^0$ una serie canonica $\bar{g}$ di dimensione

$$\pi(\omega - 1) + \omega - 2 - \pi(\omega - 1) = \omega - 2.$$

Ora, e curve $c_1{}^0$, private di diramazione, sono di genere $2\omega - 1$. La serie $\bar{g}$ ha quindi la deficienza ω. Vale a dire, con PICARD, che ω è la irregolarità di $2F$. Il genere aritmetico di questo cono doppio vale

$$p_a = p_g - \omega = (\pi - 1)(\omega - 1) - 1.$$

Conseguentemente, si ha

$$p^{(1)} = 8p_a + 9.$$

Insomma:

Per tutti i valori del genere geometrico p_g *(e per tutti i valori della irregolarità) esistono superficie algebriche col sistema canonico puro irriducibile e i cui generi lineare* $p^{(1)}$ *e aritmetico* p_a *danno luogo alla relazione* $p^{(1)} = 8p_a + 9$.

Modelli di tali superficie si possono costruire nel modo seguente.

Sia F *un cono di genere* $\omega \gtrless 1$ *e ordine* n. *Sia* φ *un cono d'ordine* $2n - 4$ *biaggiunto a* F *e tangente a questo cono secondo un gruppo di* $n + \omega - 2$ *generatrici non appartenente alla serie lineare segata su* F *dai coni aggiunti d'ordine* $n - 2$. *Sia infine* ψ *un gruppo di* $2\pi + 2$, $\pi \gtrless 1$ *piani di un fascio generico dello spazio. Il cono doppio* $2F$ *provvisto della curva di diramazione* $F \cap (\varphi + \psi)$ *possiede il sistema canonico irriducibile e ha i generi*

$$p_g = \pi(\omega - 1) \quad , \quad p_a = p_g - \omega \quad , \quad p^{(1)} = 8p_a + 9 = 8(\pi - 1)(\omega - 1) + 1.$$

Si vede subito che il caso $\pi = \omega = 1$ corrisponde al caso delle superficie ellittiche di determinante 2.

Alcune proprietà dei nostri coni $2F$ sono semplici estensioni di quelle di queste superficie algebriche. Per esempio, prendendo per F un cilindro parallelo all'asse Oz e il fascio dei piani normali a Oz come fascio $|\mu|$, si trova immediatamente, per $\omega \geq 2$:

Il cono $2F$ *possiede un fascio di genere* ω *di curve di genere* π *birazionalmente equivalenti. Questo cono possiede anche un fascio di curve di genere* $2\omega - 1$ *birazionalmente equivalenti e bisecanti le prime.*

Un tale cono $2F$ *appartiene a una famiglia continua nella quale una classe dipende da* $(3\omega - 3) + (2\pi - 1)$ *parametri: i* $3\omega - 3$ *moduli di una curva* c *e i rapporti di* $2\pi - 1$ *piani di* ψ *con i tre rimanenti.*