Bollettino
Unione Matematica Italiana

Massimo Cimino

Una condizione sufficiente per l'equilibrio spontaneo di un fluido sotto l'azione della propria gravità.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 499–503.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_499_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Una condizione sufficiente per l'equilibrio spontaneo di un fluido sotto l'azione della propria gravità

Nota di MASSIMO CIMINO (a Napoli)

Sunto. - *Si assegna una condizione sufficiente per la relazione che lega la pressione alla densità in un fluido in equilibrio sotto l'azione della propria gravità, affinchè l'equilibrio stesso sia effettivamente possibile, ovvero non lo sia.*

1. In una nota di D. QUILGHINI, recentemente apparsa in questo Bollettino [1], è dato il teorema di esistenza e di unicità, assieme alla soluzione per successive approssimazioni, dell'equazione differenziale caratteristica del potenziale gravitazionale di una massa di gas perfetto in condizioni statiche ed isotermiche, nell'ipotesi che il gas sia contenuto entro una superficie sferica di raggio *finito*. Quest'ultima condizione è essenziale, poichè, come del resto è ben noto, qualora sia nullo il valore della pressione sulla superficie esterna (di raggio finito) che limita il fluido, una configurazione di equilibrio *spontaneo*, nelle suddette condizioni isotermiche, è impossibile.

In condizioni isotermiche, l'equazione di stato del gas porta alla relazione, tra la pressione p e la densità ρ:

$$p = K\rho, \tag{1}$$

K essendo una costante positiva. In condizioni più generali, l'esistenza in un fluido in equilibrio sotto l'azione delle forze newtoniane di mutua attrazione delle sue particelle di una relazione del tipo:

$$p = p(\rho) \tag{2}$$

è necessaria conseguenza del fatto che la forza equilibrante è conservativa [2]. Ora il QUILGHINI propone (riservandosi di ritornarvi in altro lavoro) il problema di determinare le condizioni da imporre alla (2) affinchè una configurazione spontanea di equili-

(1) Serie III, Anno XI (1956), n. 3, pp. 422-26.

(2) Infatti, in tale ipotesi, le superfici isobariche sono anche superfici di ugual densità.

brio sia effettivamente possibile. La questione, così generalmente posta, merita effettivamente di essere affrontata; nella presente nota io mi limiterò semplicemente a far vedere come, sulla base di un teorema da me dimostrato in un lavoro apparso nel 1953 in questo Bollettino ([3]), possa ritenersi già assegnata, sotto certe condizioni, una *condizione sufficiente* per la (2), — utile nelle applicazioni all'astrofisica teorica ([4]), — affinchè una configurazione di equilibrio spontaneo per il fluido sia possibile, ovvero impossibile.

2. Sia l'equazione di Poisson per il potenziale newtoniano U, che, a causa della simmetria sferica nella distribuzione di equilibrio del fluido, possiamo scrivere:

$$\frac{d^2U}{dx} + \frac{2}{x}\frac{dU}{dx} + 4\pi f\rho = 0, \tag{3}$$

x essendo la distanza di un punto dal centro della sfera ed f la costante attrattiva. Dall'equazione dell'idrostatica:

$$\frac{dp}{\rho} = dU, \tag{4}$$

e ricavando ρ dalla (2):

$$\rho = \rho(p), \tag{5}$$

otteniamo subito, integrando:

$$y = U - U_S = \int_0^p \frac{dp}{\rho(p)}, \tag{6}$$

essendo U_S il valore del potenziale *sulla superficie della sfera che limita esternamente il fluido*, e sulla quale, nell'ipotesi dell'equilibrio spontaneo, il valore della pressione va assunto uguale a zero. Se dalla (6) ricaviamo:

$$p = p(y), \tag{7}$$

e sostituiamo successivamente nella (5) e nella (3), avremo infine

---

([3]) Serie III, Anno VIII, (1953), n. 2, pp. 164-72.

([4]) Cfr. per es. M. Cimino, *Sull'equilibrio stellare convettivo* ecc. in Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Serie VIII, vol. XIV, (1953), p. 783.

l' equazione:

$$\begin{array}{ll} [E] & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx} + f(y) = 0, \\ \text{con:} \end{array} \right. \\ [E_1] & \quad f(y) = 4\pi f \cdot \rho[p(y)]. \end{array}$$

Il problema dell' equilibrio del fluido è, pertanto, ricondotto allo studio di quelle soluzioni dell' equazione [E], — che possiamo considerare come un' equazione di EMDEN generalizzata —, le quali soddisfino alle condizioni:

$$[C] \quad \left\{ \begin{array}{l} y(x) > 0\,; \quad y'(x) < 0, \quad \text{finite e continue in} \quad 0 < x \leq x^* \\ \lim\limits_{r \to +0} y(x) = C\,; \quad 0 < C < +\infty. \end{array} \right.$$

Si osservi che, per la stessa definizione della variabile dipendente y, le soluzioni $y(x)$ di classe [C] della [E] atte a rappresentare una distribuzione di equilibrio *spontaneo* sono quelle che ammettono *uno zero a distanza finita.* Possiamo pertanto concludere che, — *almeno per tutte quelle forme della* (2) *per le quali le operazioni* (5) *e* (6) *sono possibili,* — le condizioni da imporre alla (2) stessa affinchè l' equilibrio spontaneo del fluido sia assicurato sono quelle che determinano, nella corrispondente soluzione delle [E][C], uno zero a distanza finita.

3. Vediamo ora come sia possibile assegnare la accennata condizione sufficiente. A tal fine mi permetto di ricordare che, nella citata nota, io ho dato il teorema di esistenza e di unicità della soluzione del problema [E][C] nelle seguenti ipotesi per la funzione $f(y)$ ([5]):

$$\begin{array}{ll} [\mathrm{I}_1] & \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{f(y)}\ \textit{sia finita e continua, positiva e non decrescente in} \\ \qquad 0 \leq \mathrm{y} < +\infty\,;\ \textit{eventualmente nulla per}\ \mathrm{y} = 0\,; \\ \textit{ammetta derivata prima limitata; cioè:} \end{array} \right. \\ [\mathrm{I}_2] & \qquad f'(y) = |f'(y)| \leq L \quad ; \quad 0 \leq y \leq C \quad ; \quad L = \textit{costante}. \end{array}$$

Ciò posto, passiamo a dimostrare il seguente:

([5]) Lo stesso teorema, ma con condizioni meno restrittive per la $f(y)$, è stato successivamente dimostrato da G. VILLARI, *Un teorema di esistenza e di unicità ecc.*, in Rivista di Matematica dell' Università di Parma, 4 (1953), 319-326. Io continuo a mantenere le condizioni [I], servendomi esse per il Teorema di confronto che segue.

TEOREMA DI CONFRONTO [6]. – *Se* $f_1(y)$ *ed* $f_2(y)$ *sono funzioni della classe* [I], *e se:*

$$f_1(y) < f_2(y) \quad ; \quad 0 < y < C, \tag{7}$$

allora, per le soluzioni di classe [C] *delle corrispondenti equazioni* [E], *è necessariamente:*

$$\begin{cases} y_1(x) > y_2(x) \quad ; \quad 0 < x \leq x^* \\ x^* < x_0 = \left[\dfrac{6C}{K}\right]^{\frac{1}{2}} \; ; \; K \textit{ essendo il maggiore dei due valori } f_1(C),\ f_2(C). \end{cases} \tag{8}$$

Dimostriamo che la (8) è vera almeno *in un primo intervallo* di $0 < x \leq x^*$. Supponiamo, infatti, per assurdo, che in tale primo intervallo sia:

$$y_1(x) \leq y_2(x). \tag{9}$$

Ponendo:

$$\varphi_1(x) = f_1[y_1(x)] \quad ; \quad \varphi_2(x) = f_2[y_2(x)],$$

per la ipotesi (7) e per la condizione [I] si avrebbe, a maggior ragione:

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x);$$

e poichè le due soluzioni $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ possono essere poste, come ho dimostrato nel citato teorema di esistenza, nella forma:

$$\left.\begin{cases} y_1(x) = C - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (x-t)\cdot t\cdot \varphi_1(t)\cdot dt \\ y_2(x) = C - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (x-t)\cdot t\cdot \varphi_2(t)\cdot dt, \end{cases}\right. \quad ; \quad 0 < x \leq x^* \tag{10}$$

risulterebbe, almeno in quel primo intervallo di $0 < x \leq x^*$:

$$y_1(x) > y_2(x),$$

che contraddice l'ipotesi (9). È facile allora convincersi che, se le (8) sono vere in un primo intervallo di $0 < x \leq x^*$, esse continueranno ad esserlo sempre, *fino a tanto che le soluzioni* (10) *sono*

[6] Questo teorema di confronto è, sostanzialmente, quello contenuto nella mia citata nota. La presente formulazione è più generale, avendo ora escluso, accanto alla condizione (7), l'inessenziale condizione: $f_1(C) = f_2(C) = K$, imposta invece nella formulazione primitiva. Inoltre, la dimostrazione è stata corretta di una lieve imperfezione formale.

valide. Se così non fosse, esisterebbe un primo valore $\bar{x}$ per il quale sarebbe $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$ e, a partire dal quale, varrebbe l'ipotesi (9) almeno *per un primo intervallo* di $\bar{x} < x < x^*$. Con ragionamento analogo a quello tenuto dianzi si giungerebbe ad un assurdo.

Il teorema ora dimostrato vale fino a tanto che la x si mantiene in $0 < x \leq x^*$. Però possiamo ammettere che la soluzione (10) della [E] continui a valere anche per valori di $x > x^*$. In tal caso il teorema permette di stabilire delle condizioni sufficienti per l'esistenza degli zeri della soluzione di una assegnata equazione [E] mediante confronto con le soluzioni *conosciute* di una equazione dello stesso tipo, ma relativa ad una particolare funzione $f(y)$. Per esempio, scegliamo:

$$\begin{cases} f_1(y) = y^n \quad , \quad n \geq 0\,; \\ f_2(y) = f(y)\,. \end{cases}$$

Si cade allora, con la prima scelta, nella equazione di EMDEN, le cui soluzioni di classe [C] hanno, come è ben noto, uno zero per $x = \xi < +\infty$ se è $n < 5$, mentre non hanno zeri a distanza a finita se è $n \geq 5$. Per l'esistenza o meno degli zeri delle soluzioni della generica equazione [E], — e quindi per la possibilità o meno dell'equilibrio spontaneo del sistema fluido —, possiamo enunciare allora le seguenti *condizioni sufficienti*:

1) *Condizione sufficiente affinche la soluzione di classe* [C] *della* [E], *nelle ipotesi* [I], *abbia uno zero per un valore finito di* x *è che sia*:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} y^n \leq f(y) \quad ; \quad 0 < y < C \\ \textit{con}: \\ n < 5. \end{cases}$$

2) *Condizione sufficiente affinchè la detta soluzione* **non** *abbia zeri a distanza finita è che sia:*

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} y^n > f(y) \quad ; \quad 0 < y < C \\ \textit{con}: \\ n \geq 5. \end{cases}$$

Le condizioni (11) e (12) per la funzione $f(y)$ sono, in definitiva, anche condizioni sufficienti per la relazione pressione-densità, sempre nella ipotesi che, come abbiamo specificato, la $f(y)$ risulti della classe [I] e che le operazioni (5) e (6), che servono a costruirla a partire dalla (2), siano effettivamente possibili.