Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Applicabilità proiettiva fra superficie di 2a specie della V_4 di Segre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.4, p. 493–495.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_4_493_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Appplicabilità proiettiva fra superficie di 2ª specie della V_4 di Segre.

Nota di MARIO VILLA (a Bologna).

Sunto. - *Dopo aver distinto le superficie della* V_4 *di* SEGRE *in tre specie — secondo che i tre sistemi* ∞^1 *di curve quasi-asintotiche* $\gamma_{1,2,3}$ *sono distinti, due coincidono o coincidono tutti e tre — si pone la nozione di applicabilità proiettiva per le superficie di 2ª specie. Si considera poi quella particolare applicabilità proiettiva chiamata forte.*

1. Una superficie della V_4 di SEGRE, rappresentante le coppie di punti di due piani [1], possiede tre sistemi ∞^1 di curve quasi -asintotiche (a tre indici) $\gamma_{1,2,3}$ [2]. Le superficie della V_4 di SEGRE si possono pertanto distinguere in: 1) *superficie di 1ª specie* per le quali i tre sistemi di $\gamma_{1,2,3}$ sono distinti e formano perciò un tritessuto; 2) *superficie di 2ª specie* per le quali due dei tre sistemi coincidono (le $\gamma_{1,2,3}$ formano perciò una rete e dei due sistemi uno è *semplice*, l'altro *doppio*); 3) *superficie di 3ª specie* per le quali i tre sistemi di $\gamma_{1,2,3}$ coincidono in un unico sistema *(triplo)*.

(1) S'intendono escluse le superficie di VERONESE le quali rappresentano le omografie fra i due piani (per queste, nella coppia generica di punti corrispondenti, le direzioni caratteristiche sono indeterminate) e le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ della V_4 di SEGRE le quali rappresentano le trasformazioni puntuali degeneri fra i due piani (per queste, nella coppia generica di punti corrispondenti, lo jacobiano è nullo). Si veda: M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali degeneri*, « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna », Ser. IX, Vol. IX, p. 19 (1941-42); M. VILLA, *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna », Ser. IX, Vol. X, p. 7 (1943).

(2) M. VILLA e G. VAONA, *Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale*, «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Ser. VIII, Vol. VIII, p. 470 (1950).

In altri termini, le superficie della V_4 di SEGRE si dicono di 1ª, 2ª, 3ª specie secondo che rappresentano trasformazioni puntuali fra piani rispettivamente di 1ª, 2ª, 3ª specie ([3]).

Per le superficie di 1ª specie della V_4 di SEGRE si è introdotta la nozione di applicabilità proiettiva ([4]), ispirandosi a quella di applicabilità proiettiva introdotta dal FUBINI per le superficie dello spazio ordinario.

Nella presente breve Nota si estende la nozione di applicabilità proiettiva alle superficie di 2ª specie della V_4 di SEGRE (n. 2). Si presenta poi opportuno considerare una particolare applicabilità proiettiva che si dirà *forte* (n. 3). Verrà considerata anche, sebbene di assai minore interesse, una particolare applicabilità proiettiva che si dirà *inversa* (n. 3).

L'interpretazione dei concetti introdotti per le trasformazioni puntuali di 2ª specie porta per queste alle nozioni di applicabilità proiettiva, di applicabilità proiettiva forte e inversa, e viene svolta da altro autore in una Nota, che appare in questo stesso fascicolo ([5]).

2. Una corrispondenza fra due superficie Σ, Σ' situate su due varietà di SEGRE V_4, V_4^* (varietà che possiamo sempre supporre sovrapposte), si dirà *quasi-asintotica* quando alla rete delle quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ di Σ corrisponde la rete delle quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ di Σ', al sistema ∞^1 semplice di $\gamma_{1,2,3}$ di Σ (n. 1) corrispondendo il sistema semplice di $\gamma_{1,2,3}$ di Σ' (e quindi al sistema doppio di $\gamma_{1,2,3}$ di Σ quello doppio di $\gamma_{1,2,3}$ di Σ').

Prima di porre la nozione di applicabilità proiettiva fra Σ, Σ', ricordiamo ancora che esistono due sistemi ∞^{16} di omografie K fra gli spazi lineari S_8, S_8^* ambienti di V_4, V_4^*, che mutano V_4 in V_4^* ([6]).

([3]) Si veda ad es.: M. VILLA, *Progressi recenti nella teoria delle trasformazioni puntuali*, « Conferenze del Seminario Matematico dell'Università di Bari », N. 10 (1955); M. VILLA, *Classificazione delle trasformazioni puntuali di 3ª specie fra piani*, « questo Bollettino », Ser. III, Vol. IX, p. 141 (1956).

([4]) M. VILLA e L. MURACCHINI, *L'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali*, « questo Bollettino », Ser. III, Vol. X, p. 313 (1955).

([5]) F. SPERANZA, *Applicabilità proiettiva fra trasformazioni puntuali di 2ª specie*, « questo Bollettino », p. 526.

([6]) Le omografie di uno dei sistemi I mutano una prefissata schiera di piani di V_4 in una schiera di piani di V_4^*, mentre le omografie dell'altro sistema $\bar{I}$ mutano quella stessa schiera di piani di V_4 nell'altra schiera di piani di V_4^*. Se la V_4 rappresenta le coppie di punti dei due piani π_1, π_2 e la V_4^* le coppie di punti dei due piani π_1^*, π_2^*, un'omografia che muta V_4 in V_4^* si ottiene assegnando un'omografia fra π_1, π_1^*

Ciò posto, *si dirà applicabilità proiettiva fra due superficie* Σ, Σ' *una corrispondenza* Γ *quasi-asintotica tale che, nella coppia generica* P, P′ *di punti corrispondenti, esista un'omografia* K *ivi tangente a* Γ (7) *per cui le due direzioni quasi-asintotiche* (8) *uscenti da* P *(da* P′*) sono caratteristiche* (9).

3. Si dirà poi *applicabilità proiettiva forte* un'applicabilità proiettiva fra le superficie Σ, Σ' tale che nella coppia generica di punti corrispondenti, la direzione quasi-asintotica doppia (10) sia addirittura ipercaratteristica per l'omografia K (11).

Si dirà infine *applicabilità proiettiva inversa* un'applicabilità proiettiva fra le superficie Σ, Σ' tale che nella coppia generica di punti corrispondenti, la direzione quasi-asintotica semplice (12) sia addirittura ipercaratteristica per l'omografia K.

e un'omografia fra π_2, π_2^*, ma si ottiene anche assegnando un'omografia fra π_1, π_2^* e un'omografia fra π_2, π_1^*. Corrispondentemente alle due eventualità si hanno omografie del sistema I o del sistema $\bar{I}$.

(7) In uno spazio lineare (proiettivo) S_r ad r dimensioni, si consideri una superficie Σ e in un altro spazio $\bar{S}_r$ sia pure assegnata una superficie $\bar{\Sigma}$ e fra le due superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ si abbia una corrispondenza γ. Si possono sempre scegliere i parametri nella rappresentazione parametrica di $\bar{\Sigma}$ in modo che punti delle due superficie P, $\bar{P}$ corrispondenti in γ siano dati dagli stessi valori dei parametri. Si dice che un'omografia Ω fra gli spazi S_r, $\bar{S}_r$ è tangente alla corrispondenza γ fra Σ, $\bar{\Sigma}$ nella coppia P, $\bar{P}$ di punti corrispondenti, quando ogni curva C, tracciata su Σ e passante per P, viene mutata da γ e da Ω rispettivamente in due curve $\bar{C}$ e $\bar{C}_0$ che hanno in $\bar{P}$ un contatto analitico del 1° ordine (almeno). Può avvenire che per curve C la cui tangente in P ha una particolare direzione t, le curve $\bar{C}$ e $\bar{C}_0$ abbiano in $\bar{P}$ un contatto geometrico del 2° ordine. In tal caso si dice che la direzione t tangente in P a C (ed anche la direzione $\bar{t}$ tangente in $\bar{P}$ alla $\bar{C}$) è caratteristica relativamente a γ e a Ω.

Se poi il contatto geometrico in $\bar{P}$ delle curve $\bar{C}$ e $\bar{C}_0$ è del 3° ordine (almeno), la direzione t (come pure la $\bar{t}$) si dirà *ipercaratteristica* relativamente a γ e a Ω.

(8) Si dicono direzioni *quasi-asintotiche* uscenti da un punto P di una superficie di 2ª specie, le due direzioni tangenti in P alle due curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ uscenti da P. Più precisamente si dirà direzione quasi-asintotica *semplice* quella tangente alla $\gamma_{1,2,3}$ del sistema semplice (*doppia* l' altra).

(9) Per la nozione di direzioni caratteristiche, si veda la nota (7). Nel testo ci si potrebbe anche limitare a considerare omografie K del sistema I (o del sistema $\bar{I}$) in quanto se esiste una K di I che soddisfa alle precedenti condizioni, esiste anche una K di $\bar{I}$ che pure soddisfa (ed inversamente).

(10) Si veda la nota (8).

(11) Si veda la nota (7).

(12) Si veda la nota (8).