Bollettino Unione Matematica Italiana

Anna Marisa Manarini

Un teorema di unicità per le equazioni di Maxwell-Minkowski.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 440–444.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_440_0>

Un teorema di unicità per le equazioni di Maxwell-Minkowski.

Nota di Anna Marisa Manarini (a Bologna)

Sunto. - *Come al n. 1.*

1. Consideriamo un corpo omogeneo ed isotropo, il quale rispetto ad un sistema inerziale di riferimento $S(x, y, z, t)$ sia dotato di moto traslatorio uniforme con velocità v nella direzione positiva dell'asse x. Sia ε la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica e γ la conducibilità elettrica del corpo, che supporremo costanti; supporremo inoltre il corpo privo di cariche rispetto ad un osservatore solidale con esso [1].

I fenomeni elettromagnetici rispetto al fissato riferimento (S) sono regolati dalle equazioni di Maxwell-Minkowski, le quali, usando la metrologia gaussiana razionalizzata ed il comune simbolismo, sono:

$$(1)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\[2ex] \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{J} \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{D} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H} = \varepsilon\left(\boldsymbol{E} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right) \\[2ex] \boldsymbol{B} - \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{E} = \mu\left(\boldsymbol{H} - \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D}\right) \end{cases}$$

$$(3)\qquad \boldsymbol{J} - \rho \boldsymbol{v} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E} \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)$$

con $\beta = \dfrac{v}{c}$.

L'ultima equazione si semplifica tenendo conto dell'ipotesi che il corpo sia privo di cariche per un osservatore solidale con esso. In questo caso infatti per l'osservatore (S), rispetto al quale il corpo si muove, la densità di carica non è nulla, ma, come si ricava con semplici considerazioni dopo aver applicato la trasformazione speciale di Lorentz al tetravettore densità di corrente-carica, la

[1] Questa ipotesi è poco restrittiva, in quanto che, come è noto, in un conduttore la densità di carica decresce esponenzialmente col tempo.

densità di carica può essere scritta nel modo seguente ([2]):

$$\rho = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{c^2} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{v}),$$

e pertanto l'equazione (3) diviene:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} \right). \tag{4}$$

Ci proponiamo in questa nota di dimostrare un teorema di unicità per le equazioni di MAXWELL-MINKOWSKI, analogo a quello ordinario per le equazioni di MAXWELL valido per i corpi in quiete.

Supposto $v < c/n$ (con $n^2 = \varepsilon\mu$), ipotesi lecita praticamente in tutti i casi, dimostreremo che le equazioni di MAXWELL-MINKOWSKI ammettono in un qualsiasi dominio di volume V racchiuso dalla superficie Σ una sola soluzione, qualora siano assegnati i valori di $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ per $t = 0$ in tutti i punti del dominio ed inoltre sia nota in ogni istante la componente tangenziale di $\boldsymbol{E}$ oppure di $\boldsymbol{H}$ sulla superficie Σ.

È da notare che questo teorema non può dedursi da quello ordinario valido per i corpi in quiete mediante una semplice applicazione della trasformazione speciale di LORENTZ, in quanto, a causa della trasformazione stessa, le condizioni iniziali ed al contorno verrebbero profondamente modificate.

2. Scriviamo innanzi tutto, giacchè ci saranno utili in seguito, le espressioni delle componenti cartesiane di $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$, che si ottengono dalle (2) nell'ipotesi che sia $1 - n^2\beta^2 \neq 0$. Ponendo per semplicità

$$\varepsilon^* = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}\,\varepsilon, \qquad \mu^* = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}\,\mu, \qquad \beta^* = \frac{n^2-1}{1-n^2\beta^2}\,\beta, \tag{5}$$

esse sono ([3]):

$$D_x = \varepsilon E_x, \quad D_y = \varepsilon^* E_y - \beta^* H_z, \quad D_z = \varepsilon^* E_z + \beta^* H_y, \tag{6}$$

$$B_x = \mu H_x, \quad B_y = \mu^* H_y + \beta^* E_z, \quad B_z = \mu^* H_z - \beta^* E_y. \tag{7}$$

([2]) Cfr. R. BECKER, *Teoria della elettricità*, Vol. II, § 60, ed. Sansoni 950.

([3]) Cfr. T. ZEULI, *Sui fenomeni elettromagnetici nei corpi omogenei elettricamente conduttori in moto traslatorio uniforme*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Torino, Vol. XIV, 1954-55, p. 141.

Per dimostrare il teorema enunciato procediamo per assurdo, ossia supponiamo che $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$ e $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ siano due soluzioni delle equazioni di MINKOWSKI, entrambe soddisfacenti alle condizioni iniziali ed al contorno imposte. A $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$ corrisponderanno i vettori $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{J}_1$ ed a $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ i vettori $\boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{J}_2$, tali da soddisfare le equazioni (1), (2) e (4).

Poniamo:

$$\text{(8)} \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 , \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2 , \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2 .$$
$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2 , \qquad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 - \boldsymbol{J}_2 .$$

Affinchè siano soddisfatte le condizioni iniziali, $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ dovranno essere nulli in ogni punto del dominio all'istante $t = 0$, e affinchè siano soddisfatte le condizioni al contorno dovrà essere nulla in ogni punto della superficie Σ la componente tangenziale di $\boldsymbol{E}$ oppure quella di $\boldsymbol{H}$. Inoltre, per la linearità delle equazioni di MAXWELL-MINKOWSKI, anche $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{J}$, definiti dalle (8), soddisferanno alle equazioni (1), (2), (4), (6), (7).

Moltiplicando scalarmente la prima equazione delle (1) per $\boldsymbol{H}$ e la seconda per $\boldsymbol{E}$ e sottraendo membro a membro, si ha, applicando un noto teorema di calcolo vettoriale:

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \times \boldsymbol{H} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \times \boldsymbol{E}\right) - \frac{1}{c}\, \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{E} .$$

Poniamo:

$$w = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{B}) .$$

Dalle (6) e (7) si ricava:

$$\text{(10)} \qquad w = \frac{1}{2}\,(\varepsilon E_x^2 + \mu H_x^2 + \varepsilon^* E_y^2 -$$
$$- 2\beta^* E_y H_z + \mu^* H_z^2 + \varepsilon^* E_z^2 + 2\beta^* E_z H_y + \mu^* H_y^2) .$$

Si verifica facilmente che è:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \times \boldsymbol{H} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \times \boldsymbol{E} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

per cui la (9) diviene:

$$c \operatorname{div}(\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}) = -\frac{\partial w}{\partial t} - \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{E} .$$

Integrando su tutto il volume V ed applicando al primo membro il teorema della divergenza, questo è nullo per le condizioni al contorno imposte e quindi si ha:

$$\frac{d}{dt}\int_V w\,dV = \int_V -\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{E}\,dV. \tag{11}$$

3. Dimostriamo innanzi tutto che, sotto la condizione $v < c/n$, w non può mai essere negativa. Infatti possiamo scrivere la (10) nel modo seguente:

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E_x{}^2 + \mu H_x{}^2 + F + Q\right), \tag{12}$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} F &= \varepsilon^* E_y{}^2 - 2\beta^* E_y H_z + \mu^* H_z{}^2 \\ Q &= \varepsilon^* E_z{}^2 + 2\beta^* E_z H_y + \mu^* H_y{}^2 . \end{aligned} \tag{13}$$

Affinchè le espressioni F e Q siano due forme quadratiche definite positive, devono valere contemporaneamente le due disuguaglianze:

$$\varepsilon^* > 0 \quad , \quad \varepsilon^*\mu^* - \beta^{*2} > 0 . \tag{14}$$

Sostituendo a ε^*, μ^*, β^* le loro espressioni date dalle (5), si verifica immediatamente che la prima disuguaglianza è soddisfatta non appena è $1 - n\beta > 0$, ossia appunto $v < c/n$; per la seconda disuguaglianza deve essere:

$$\frac{(1-\beta^2)^2 n^2}{(1-n^2\beta^2)^2} > \frac{(n^2-1)^2\beta^2}{(1-n^2\beta^2)^2}$$

da cui, estraendo da ambo i membri la radice quadrata, si ottiene dopo alcuni passaggi:

$$(n+\beta)(1-n\beta) > 0 .$$

Quindi sotto la condizione $v < c/n$, F e Q sono certamente due forme quadratiche definite positive. Ne consegue che w, essendo somma di forme quadratiche definite positive, non può essere mai negativa e può essere nulla solo per $\boldsymbol{E} = 0$ e $\boldsymbol{H} = 0$.

Dalla (4), ricordando le relazioni (6), si ha poi:

$$-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{E} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(-E^2 - \beta\beta^* E_y{}^2 - \beta\beta^* E_z{}^2 + \beta\mu^* E_y H_z - \beta\mu^* E_z H_y\right).$$

Aggiungendo al secondo membro la quantità positiva

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(E^2 + \beta\beta^* E_y{}^2 + \beta\beta^* E_z{}^2\right)$$

si ottiene la disuguaglianza:

$$-\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{E} \leq \frac{\gamma\beta\mu^*}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_y H_z - E_z H_y)$$

che, moltiplicando e dividendo il secondo membro per una costante arbitraria $2r$, possiamo scrivere:

$$(15) \qquad -\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{E} \leq \frac{\gamma\beta\mu^*}{2r\sqrt{1-\beta^2}}(2rE_y H_z - 2rE_z H_y).$$

Osserviamo che se si pone $r = \sqrt{\varepsilon^*\mu^*} - \beta^*$, dalle (14) risulta immediatamente che r è positiva, e inoltre si verifica facilmente che è:

$$2rE_y H_z \leq F \quad , \quad -2rE_z H_y \leq Q.$$

Infatti sostituendo a F e Q le loro espressioni date dalle (13), dalle due disuguaglianze sopra scritte si ricavano rispettivamente le seguenti disuguaglianze, certamente verificate:

$$(\sqrt{\varepsilon^*}\, E_y - \sqrt{\mu^*}\, H_z)^2 \geq 0 \quad , \quad (\sqrt{\varepsilon^*}\, E_z + \sqrt{\mu^*}\, H_y)^2 \geq 0.$$

Pertanto, ricordando la (12), dalla (15) si ottiene:

$$-\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{E} \leq Rw,$$

con R costante positiva, la cui espressione è:

$$R = \frac{\gamma\beta\mu^*}{r\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dalla (11) allora si ricava:

$$\frac{d}{dt}\int_V w\,dV \leq R\int_V w\,dV,$$

da cui, integrando rispetto al tempo e ricordando le condizioni iniziali, si ha infine:

$$\int_V w\,dV \leq R\int_0^t dt \int_V w\,dV.$$

Questa disuguaglianza è soddisfatta solo se w è identicamente uguale a zero ([4]). Poichè, come già abbiamo detto, ciò si verifica solo per $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ contemporaneamente uguali a zero, segue dalle (8) che le due soluzioni delle equazioni di MINKOWSKI, $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$, e $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ debbono necessariamente coincidere.

([4]) Cfr. D. GRAFFI, *Sulla teoria della propagazione del calore per convezione naturale*, Rend. Acc. Lincei, Vol. XII, 1930, p. 135 (in nota).