
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PAOLO SANTORO

Un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni di una equazione differenziale non lineare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 11
(1956), n.3, p. 432–432.

Zanichelli

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_432_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni di una equazione differenziale non lineare.

Nota di PAOLO SANTORO (a Firenze)

Sunto. - Estendendo un criterio di H. A. ANTOSIEWICZ, si dimostra un teorema di limitatezza in futuro delle soluzioni di un'equazione differenziale non lineare.

Sia data l'equazione

$$(1) \quad \ddot{x} + \omega(x, \dot{x})\dot{x} + h(x) = p(t)$$

con $\omega(x, \dot{x})$ e $h(x)$ funzioni continue e lipschitziane in qualunque intervallo finito e $p(t)$ funzione continua di t in $(t_0, +\infty)$.

Se

$$\omega(x, \dot{x}) = \varphi(x, \dot{x}) + \psi(x, \dot{x})$$

i) con

$$\varphi(x, \dot{x}) > 0$$

ii) è possibile trovare una funzione $f(x)$ tale che posto

$$a(x) = \exp\left(\int_0^x f(u)du\right)$$

risulti $0 < a(x) < A$ (A costante) e

$$\psi(x, \dot{x}) \geq f(x)a^{-1}(x)\dot{x}$$

iii) posto $H(x) = \int_0^x a^2(u)h(u)du$ sia $H(x) > 0$ per $x \neq 0$ e $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} H(x) = +\infty$

iv) se $\int_0^{\infty} |p(t)| dt < \infty$; allora ogni soluzione dell'equazione (1) è limitata in futuro, insieme alla sua derivata ⁽¹⁾.

Il teorema si prova seguendo il ragionamento di H. A. ANTOSIEWICZ, richiamato in Nota. La (1) equivale al sistema:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y/a(x) \\ \dot{y} = -\varphi(x, y)y - \psi(x, y)y - h(x)a(x) + p(t)a(x) + f(x)y^2a^{-2}(x) \end{cases}$$

e si verifica subito che se consideriamo la funzione

$$U(x, y) = (2H(x) + y)^{1/2}$$

essa rimane limitata su qualunque soluzione $x=x(t)$, $y=y(t)$ del sistema (2). Derivando, infatti, la funzione $U[x(t), y(t)]$ rispetto a t , abbiamo

$$U\dot{U} = -\varphi(x, y)y^2 - [\psi(x, y) - f(x)ya^{-2}(x)]y^2 + p(t)a(x)y < A|y||p(t)|$$

per la ii), da cui $\dot{u} < A|p(t)|$ e quindi per la iv) risulta il teorema.

⁽¹⁾ Questo teorema estende un teorema di H. A. ANTOSIEWICZ. Confr. *On non-linear differential equations of the second order with integrable forcing term*, Jour. London Math. Soc., XXX (1955), p. 64-67.