Bollettino
Unione Matematica Italiana

Demore Quilghini

# Il potenziale gravitazionale di una massa di gas perfetto in equilibrio e in condizioni isotermiche.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **11** (1956), n.3, p. 422–426.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_422_0>

# Il potenziale gravitazionale di una massa di gas perfetto in equilibrio e in condizioni isotermiche.

Nota di DEMORE QUILGHINI (a Firenze) (*)

**Sunto.** - *L'equazione differenziale non lineare del secondo ordine:* $\frac{d^2V(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{\lambda^2}{e^{V_0}} e^{V(r)}$ *con le condizioni al contorno:* $\lim_{r \to +0} V(r) = V_0$, $0 < V_0 < \infty$, $\lim_{r \to +0} \frac{dV(r)}{dr} = 0$ *è caratteristica per il potenziale gravitazionale di una massa di gas perfetto in condizioni statiche ed isotermiche, nell'ipotesi che il gas sia contenuto entro una superficie sferica* $\Sigma$ *di raggio* $r_1$ *finito. Si dimostra il teorema di esistenza e di unicità per la equazione scritta, a partire dalle condizioni al contorno poste, e se ne costruisce l'integrale col metodo delle approssimazioni successive.*

**La posizione del problema.** - In condizioni di equilibrio una massa fluida, sotto l'azione della propria gravitazione, e di una pressione costante (eventualmente nulla) sulla superficie che la limita, assume necessariamente, a causa del teorema di CARLEMAN (¹), una configurazione sferica, con densità e pressione distribuite con simmetria sferica. In queste condizioni anche il potenziale specifico gravitazionale $U(P)$ è funzione della distanza $r$ del punto potenziato $P$ dal centro $O$ della sfera.

Indichiamo con $p = p(r)$ la pressione e con $\rho = \rho(r)$ la densità in un punto $P$ del gas a distanza $r$ da $O$, $o \leq r \leq r_1$, essendo $r_1$ il raggio, finito, per ipotesi, della superficie sferica $\Sigma$ che limita la massa gassosa.

L'equazione di stato $p = k\rho$, che lega, punto per punto, la pressione e la densità di un gas perfetto in condizioni isotermiche, essendo $k$ una costante positiva, permette di scrivere le tre equazioni dell'idrostatica: $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial U}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$ nella forma:

$$U - U_0 = k \log \frac{\rho}{\rho_0}. \tag{1}$$

(*) Istituto Matematico « U. Dini », Via Alfani, 31.

(¹) Cfr. L. LICHTENSTEIN: « *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten* », (Berlino 1933).

Tenuto conto di questa e della simmetria sferica e con le posizioni:

$$(2) \qquad V(r) = \frac{U(r)}{k} \ , \ \lambda^2 = -\frac{4\pi f \rho_0}{k} \ .$$

l'equazione di POISSON: $\Delta_2 U(P) = -4\pi f \rho(P)$, essendo $f$ la costante di gravitazione, diviene la equazione differenziale non lineare del secondo ordine in $V(r)$:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{d^2 V(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\,V(r)}{dr} = -\frac{\lambda^2}{e^{V_0}}\, e^{V(r)}, \ V_0 = V(o):$$

Nella (1) $U_0$ è il potenziale specifico gravitazionale nel centro $O$ della sfera e $\rho_0$ la densità, finita, nello stesso punto. Allora le condizioni al contorno per la (I), tenuto conto che il potenziale gravitazionale è una funzione positiva e finita in tutto lo spazio e che, nel caso statico in esame, a causa del teorema di L. LICHTENSTEIN[2] sul piano di simmetria, il potenziale gravitazionale $U(P)$ raggiunge il suo unico massimo nel centro $O$ della sfera, sono:

$$(3) \quad \begin{cases} \lim\limits_{r \to +0} V(r) = \lim\limits_{r \to +0} \dfrac{U(r)}{k} = \dfrac{U_0}{k} = V_0, \ o < V_0 < \infty, \ V(r) \leq V_0 \\ \lim\limits_{r \to +0} \dfrac{dV(r)}{dr} = \lim\limits_{r \to +0} \dfrac{1}{k}\dfrac{dU(r)}{dr} = 0. \end{cases}$$

Dalla (1), tenuto conto che il potenziale gravitazionale è una funzione finita in tutto lo spazio, segue l'impossibilità di una configurazione di equilibrio spontaneo, in assenza cioè di una distribuzione di pressione sulla superficie $\Sigma$ che limita le masse; infatti, se su $\Sigma$ fosse $p = 0$ avremmo anche, su $\Sigma$, $\rho = 0$ e quindi dalla (1) $\lim\limits_{r \to r_1} | U - U_0 | = V_{-\infty}$.

In questa nota, senza affrontare il problema dal punto di vista fisico, supponendo senz'altro che la massa di gas sia limitata da una superficie sferica $\Sigma$ di raggio $r_1$ finito, mi limito a studiare l'equazione (I) a partire dalla (3), riservandomi di tornare in altro momento sul problema delle condizioni da imporsi sull'equazione di stato $p = p(\rho)$ affinchè sia possibile una configurazione di equilibrio spontaneo.

(2) Cfr. loc. cit in (1).

**Teorema di esistenza e di unicità e costruzione dell'integrale.**

Noti teoremi della teoria del potenziale gravitazionale assicurano l'esistenza e l'unicità per l'integrale dell'equazione (I) con le condizioni (3). In questo caso particolare ([3]) si può dimostrare direttamente la esistenza e l'unicità col metodo delle approssimazioni successive, con questo metodo si ha inoltre il vantaggio di poter costruire l'integrale della (I) a partire dalla (3), e di maggiorare l'errore che si commette fermandoci ad un dato ordine di approssimazione

La (I), tenuto conto delle (3), si può trasformare nella equazione integrale:

$$V(r) = V_0 - \frac{\lambda^2}{e^{V_0}} \int_0^r \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\xi \eta^2 e^{V(\eta)} d\eta . \tag{II}$$

Costruiamo ora la successione di funzioni $\{ V_n(r) \}$ definite dalle relazioni:

$$(4)_0 \quad V_0(r) = V_0 ; \quad (4)_n \quad V_n(r) = V_0 - \frac{\lambda^2}{e^{V_0}} \int_0^r \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\xi \eta^2 e^{V_{n-1}(\eta)} d\eta ; \; n = 1, 2, \ldots .$$

Si ha:

$$V_1(r) = V_0 - \frac{\lambda^2}{3!} r^2 ; \quad V_2(r) = V_0 - \frac{\lambda^2}{e^{V_0}} \int_0^r \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\xi \eta^2 e^{V_1(\eta)} d\eta \geq V_1(r)$$

e quindi: $V_1(r) < V_2(r) < V_0$, analogamente: $V_2(r) > V_3(r) > V_1(r)$

([3]) L'equazione differenziale (I) fu già considerata dallo astrofisico Zöllner nella sua: « *Natur der Kometen* », Leipzig 1872. Egli trova per la (I) l'integrale particolare $V(r) = \log \frac{2e^{V_0}}{\lambda^2 r^2}$, ma non costruisce l'integrale generale. Per lo stesso argomento cfr. H. Lemke:

a) « *Ueber das Gleichgewicht kosmischer Gasmassen* », Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 124, (1901) pagg. 143-151.

b) « *Über die Differentialgleichungen welche den Gleichgewichtszustand eines gasförmigen Himmelskörpers bestimmen dessen Teile gegeneinander nach dem* Newton*schen Gesetze gravitieren* », loc. cit. in a) Band 142, Heft 2, (1913) pagg. 118-143.

per $0 < r$; per induzione si prova:

$$(5)\quad \begin{cases} V_{2k-1}(r) < V_{2k}(r) < V_{2k-2}(r), \\ V_{2k}(r) > V_{2k+1}(r) > V_{2k-1}(o); \qquad 0 < r, \qquad k = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Si ha poi:

$$V_{2k}(r) - V_{2k-1}(r) = \frac{\lambda^2}{e^{V_0}} \int_0^r \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\xi \eta^2 \{ e^{V_{2k-2}(\eta)} - e^{V_{2k-1}(\eta)} \} d\eta.$$

Poichè tenuto conto delle (6), si ha: $1 - e^{V_{2k-1}(\eta) - V_{2k-2}(\eta)} \leq$ $\leq V_{2k-2}(\eta) - V_{2k-1}(\eta)$ otteniamo:

$$(6_1)\qquad V_{2k}(r) - V_{2k-1}(r) \leq \lambda^2 \int_0^r \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\xi \eta^2 \{ V_{2k-2}(\eta) - V_{2k-1}(\eta) \} d\eta,$$

e analogamente

$$(6_2)\qquad V_{2k}(r) - V_{2k+1}(r) \leq \lambda^2 \int_0^r \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\xi \eta^2 \{ V_{2k}(\eta) - V_{2k-1}(\eta) \} d\eta .$$

Poichè:

$$V_0 - V_1(r) = \frac{\lambda^2}{3!} r^2 \qquad e\ V_2(r) - V_1(r) \leq \frac{\lambda^4 r^4}{5!}$$

per induzione si prova:

$$(7_1)\qquad V_{2k}(r) - V_{2k-1}(r) \leq \frac{[\lambda r]^{4k}}{[4k+1]!} \leq \frac{[\lambda r_1]^{4k}}{[4k+1]!},$$

$$(7_2)\qquad V_{2k}(r) - V_{2k+1}(r) \leq \frac{[\lambda r]^{4k+2}}{[4k+3]!} \leq \frac{[\lambda r_1]^{4k+2}}{[4k+3]!}, \quad 0 \leq r \leq r_1 .$$

($r_1$ è il raggio, finito, della superficie sferica $\Sigma$ limitante il gas). Maggiorando i valori assoluti dei termini della serie:

$$V(r) = V_0(r) + [V_1(r) - V_0(r)] + \dots + [V_{2k}(r) - V_{2k-1}(r)] + \\ + [V_{2k+1}(r) - V_{2k}(r)] + \dots$$

con le (7), ed applicando il criterio del rapporto, segue che la successione $\{ V_n(r) \}$ è uniformemente convergente in $(0; r_1)$; e perciò, uniformemente in $(0\,;\,r_1)$:

$$\lim_{n\to\infty} V_n(r) = V(r)\,; \qquad \lim_{n\to\infty} e^{V_n(r)} = e^{V(r)}\,,$$

e dalla $(4)_n$, passando al limite per $n\to\infty$ segue la (II). Inoltre in $(0\,;\,r_1)$ si ha:

$$\begin{aligned}
0 &\leq V_{2k}(r) - V(r) \leq V_{2k}(r) - V_{2k+1}(r)\,;\\
0 &\leq V(r) - V_{2k+1}(r) \leq V_{2k}(r) - V_{2k+1}(r),\\
0 &\leq V_{2k}(r) - V(r) \leq V_{2k}(r) - V_{2k-1}(r)\,;\\
0 &\leq V(r) - V_{2k-1}(r) \leq V_{2k}(r) - V_{2k-1}(r)\,;
\end{aligned}$$

e le differenze: $V_{2k}(r) - V_{2k-1}(r)$, $V_{2k}(r) - V_{2k+1}(r)$ sono maggiorate dalle (7) che danno perciò una limitazione per l'errore.

L'unicità segue dal fatto che se $V(r)$ è una soluzione della (II) si ha in $(0\colon r_1)$:

$$V(r) - V_n(r) = \frac{\lambda^2}{e^{V_0}} \int_0^r \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\xi \lambda^2 \left| e^{V_{n-1}(\eta)} - e^{V(\eta)} \right| d\eta\,.$$

D'altra parte, essendo le $V_n(\eta)$ e $V(\eta)$ limitate in $(0\,;\,r_1)$, esiste una costante $c^2$ tale che:

$$\left| e^{V_{n-1}(\eta)} - e^{V(\eta)} \right| \leq c^2 e^{V_0} \left| V_{n-1}(\eta) - V(\eta) \right|\,,$$

quindi:

$$\left| V(r) - V_n(r) \right| \leq c^2\lambda^2 \int_0^r \frac{d\xi}{\xi^2} \int_0^\xi \eta^2 \left| V(\eta) - V_{n-1}(\eta) \right| d\eta\,.$$

Inoltre si ha:

$$V(r) - V_0 \leq \frac{c^2\lambda^2 r^2}{3\,!}\,,$$

da quest'ultima e dalla precedente per induzione si ottiene:

$$\left| V(r) - V_n(r) \right| \leq \frac{[c\lambda r]^{2n+2}}{[2n+3]\,!}\,, \qquad 0 \leq r \leq r_1$$

e perciò, uniformemente in $(0\,;\,r_1)$ otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} V_n(r) = V(r)\,,$$

e da questa l'unicità.