
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LIONELLO CANTONI

**Sulle corrispondenze linearizzanti e sui
riferimenti intrinseci in una coppia a
giacobiano nullo.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 11
(1956), n.3, p. 402–411.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_402_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_402_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulle corrispondenze linearizzanti e sui riferimenti intrinseci in una coppia a jacobiano nullo.

Nota di LIONELLO CANTONI (a Bologna)

Sunto. - *Vengono indicate alcune proprietà delle corrispondenze linearizzanti relative alle trasformazioni razionali osculatrici (del 2° ordine), facendone applicazione alla determinazione dei riferimenti intrinseci in una coppia a jacobiano nullo (oltre che in una coppia regolare).*

1. Il VILLA ha osservato che il concetto di corrispondenza linearizzante di due trasformazioni puntuali fra spazi lineari, utilizzato precedentemente da lui e da altri in una coppia regolare di punti corrispondenti, conserva tutta la sua validità anche nel caso in cui nella coppia lo jacobiano sia nullo ⁽¹⁾ ed ha pensato come da ciò si potesse arrivare alla determinazione di riferimenti intrinseci, nel caso dello jacobiano nullo, in modo più semplice e più soddisfacente di quello già conosciuto ⁽²⁾. Nel caso delle trasformazioni puntuali fra due piani, il VILLA stesso ha dimostrato come si possa effettivamente pervenire a tali riferimenti intrinseci procedendo in quest'ordine d'idee ⁽³⁾.

Per le trasformazioni puntuali fra due S_r , con $r > 2$, ciò invece apparirà nel presente lavoro.

Occupandomi di questa ricerca, mi sono imbattuto in certe proprietà delle corrispondenze linearizzanti relative alle trasformazioni razionali del 2° ordine osculatrici, valevoli solo per $r > 2$, sia nel caso della coppia regolare che in quella a jacobiano nullo, che ho esposte nei nn. 2, 3. Nei nn. 4, 5 ne faccio poi applicazione per la determinazione dei riferimenti intrinseci nel caso della coppia a jacobiano nullo.

⁽¹⁾ M. VILLA, *Progressi recenti nella teoria delle trasformazioni puntuali*, « Conf. del Sem. di Mat. di Bari », n. 10, 1-19 (1955). La proprietà di cui al testo è contenuta nel n. 4.

⁽²⁾ M. VILLA e G. VAONA, *Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. I. Intorno del 2° ordine; II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », s. VIII, vol. VI, 184-188, 278-282 (1949).

⁽³⁾ M. VILLA, *Ancora sui riferimenti intrinseci delle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo*, Scritti Matematici in onore di Filippo Sibirani, Zuffi, Bologna, 1956.

Nel n. 6 ottengo, con lo stesso metodo, riferimenti intrinseci anche nel caso della coppia regolare, ciò che offre però assai minore interesse in quanto, nel caso regolare, i risultati già ottenuti al riguardo dal VILLA si possono considerare definitivi ⁽⁴⁾. Inoltre, nel caso regolare, volendo giovare del concetto di corrispondenza linearizzante, si può ricorrere alle corrispondenze cremoniane osculatrici ottenute mediante r reciprocità, anzichè alle trasformazioni razionali, come il VILLA stesso ha indicato ⁽⁵⁾.

2. Sia data una trasformazione puntuale T fra due spazi S, S' , ad r dimensioni ($r \geq 3$) e sia O, O' una coppia qualunque di punti corrispondenti.

Assumendo O e O' come origini dei riferimenti proiettivi in S, S' , la T si rappresenta, nell'intorno della coppia considerata, con sviluppi del tipo:

$$(1) \quad \begin{aligned} y_s &= f_{1s} + f_{2s} + \dots + f_{ks} + \dots \quad (s = 1, 2, \dots, r) \\ f_{ks} &= \sum_{p_1 \dots p_k} \alpha_{p_1 \dots p_k} x_{p_1} \dots x_{p_k} \quad (p_1, p_2, \dots, p_k = 1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

Indichiamo ora con T^* una generica trasformazione razionale del 2° ordine che osculi la T in O, O' . Tale trasformazione (t. r. o.) si rappresenterà con le equazioni:

$$(2) \quad y_s = \frac{f_{1s} + f_{1s} \varphi_1 + f_{2s}}{1 + \varphi_1 + \varphi_2} \quad (s = 1, 2, \dots, r)$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_i b_{i1} x_i, \quad \varphi_2 = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j, \\ b_{ij} &= b_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, r) \end{aligned}$$

essendo le b_{i1}, b_{ij} numeri arbitrari.

Consideriamo ora la trasformazione linearizzante di T e T^* ⁽⁶⁾. Essendo:

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_r}{\alpha_r}; \quad \frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_r}{\alpha_r}$$

⁽⁴⁾ M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. I. Intorno del 2° ordine; II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci. III. Trasformazioni cremoniane osculatrici*, « Atti Acc. Naz. Lincei », Rend. s. VIII, vol. IV, 55-61, 192-196, 295-303 (1948).

⁽⁵⁾ Si veda: M. VILLA, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali* « Compositio Math. », vol. 12, 137-146 (1954); M. VILLA, op. cit. nelle ⁽⁴⁾, ⁽⁴⁾.

⁽⁶⁾ M. VILLA, op. cit. nelle ⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾.

due rette corrispondenti nella c. l., e indicando rispettivamente con $f_{ks}(x)$, $\varphi_i(x)$ le $f_{ks}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$, $\varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$, la c. l. si rappresenta con le equazioni:

$$(3) \quad \bar{\alpha}_s = f_{3s}(x) + f_{2s}(x)\varphi_1(x) + f_{1s}(x)\varphi_2(x) \quad (s = 1, 2, \dots, r).$$

Osserviamo dapprima che:

a) *Data una retta p per O, le rette corrispondenti di p nelle c. l. di T e delle $\infty^{\frac{r(r+3)}{2}}$ t. r. o., formano una stella ∞^r (di centro O).*

Infatti, qualora si fissi nella (3) un sistema di valori per le α_i , i coefficienti $\bar{\alpha}_s$ vengono a dipendere linearmente dai soli parametri φ_1 e φ_2 . Ne segue che, date due rette p, p_1 per O, non esiste in generale una t. r. o. T_1 tale che la c. l. di T e T_1 muti p in p_1 .

Se ora nelle (2) e quindi nelle (3) fissiamo un determinato sistema di valori per le b_i , è chiaro che una retta p ha soltanto un fascio di possibili corrispondenti, dato che in definitiva, variando i parametri b_{ij} , varia soltanto il parametro φ_2 .

In altre parole:

b) *Data una retta p per O e una t. r. o. T^* , le rette corrispondenti di p nelle c. l. di T e delle $\infty^{\binom{r+1}{2}}$ t. r. o. che hanno gli stessi coefficienti b_i della T^* variano in un fascio $(?)$.*

Dunque, fissata una retta p e tutte le t. r. o. che hanno gli stessi coefficienti b_i di una t. r. o. fissata, a p viene a corrispondere un piano (per O) π che è il piano su cui giace il fascio di cui sopra. Una semplice caratterizzazione geometrica di questo piano, è la seguente:

Sia ω l'omografia che la T subordina fra le direzioni uscenti da O e O' e L la c. l. di T e di una t. r. o. T^* . Fissata una retta p per O, si ha che le due curve C e C^* corrispondenti di p in T e T^* rispettivamente hanno, come è ben chiaro, un contatto (analitico) del 2° ordine in O' e che il luogo dei punti S per cui i coni che proiettano C e C^* da S hanno lungo la generatrice SO' un contatto analitico del 3° ordine è una retta p' per O' (la cui trasformata $\bar{p}$ in ω^{-1} si chiama trasformata linearizzante di p). È anche noto che il luogo dei punti S per cui i coni medesimi, hanno contatto geometrico (lungo SO') del 3° ordine è un piano π' (che contiene p') il cui corrispondente $\bar{\pi}$ in ω^{-1} (che contiene $\bar{p}$) vogliamo mostrare essere il piano di cui sopra.

(?) Un analogo enunciato vale se anziché le b_i si fissano nelle (2) le b_{ij} .

Allo scopo, consideriamo accanto a T^* un'altra t. r. o. T_1^* avente per equazioni le:

$$y_s = \frac{f_{1s} + \varphi_1' f_{1s} + f_{2s}}{1 + \varphi_1' + \varphi_2'}, \quad \varphi_1' = \sum_i b_i' x_i, \quad \varphi_2' = \sum_{ij} b_{ij}' x_i x_j,$$

Evidentemente T^* e T_1^* si osculano in O , O' e le direzioni d'iperosculazione ⁽⁸⁾ di T^* e T_1^* nella coppia considerata sono date dalla:

$$\left\| \begin{array}{ccc} f_{11}, & \dots, & f_{1r} \\ f_{11}(\varphi_2 - \varphi_2') + f_{21}(\varphi_1 - \varphi_1'), & \dots, & f_{1r}(\varphi_2 - \varphi_2') + f_{2r}(\varphi_1 - \varphi_1') \end{array} \right\| = 0.$$

Questa matrice ha, per $\varphi_i = \varphi_i'$ (cioè per $b_i' = b_i$), le due righe proporzionali sicchè se due t. r. o. T^* e T_1^* posseggono gli stessi coefficienti b_i esse posseggono direzioni d'iperosculazione indeterminate nella coppia O , O' .

Pertanto, le due curve C' e C_1' trasformate mediante T^* e T_1^* della retta p , hanno in O' un contatto (geometrico) del 3° ordine. Ne consegue che i due piani π' (definito come sopra e relativo a TT^*) e π'' (analogo ente definito a partire da T , T_1^*) coincidono e coincidono quindi anche i loro corrispondenti in ω^{-1} . Ne segue l'asserto.

3. Dimostriamo ora che:

c) *La corrispondenza linearizzante relativa ad una t. r. o. individua, in generale, la t. r. o. stessa.*

Supponiamo fissati i riferimenti proiettivi intrinseci nelle stelle di centri O , O' ⁽⁹⁾ e indichiamo al solito con:

$$(1) \quad y_s = f_{1s} + f_{2s} + \dots + f_{ks} + \dots$$

le equazioni di T nell'intorno di O , O' e con:

$$(2) \quad y_s = \frac{f_{1s} + \varphi_1 f_{1s} + f_{2s}}{1 + \varphi_1 + \varphi_2} \quad (s = 1, 2, \dots, r)$$

$$(3) \quad \bar{\alpha}_s = f_{3s}(\alpha) + f_{2s}(\alpha)\varphi_1(\alpha) + f_{1s}(\alpha)\varphi_2(\alpha)$$

⁽⁸⁾ M. VILLA, *Direzioni d'osculatione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, « Boll. U. M. I. », (3), 2, 188-195 (1947).

⁽⁹⁾ Si veda: M. VILLA, op. cit. in ⁽⁴⁾, I. e II; M. VILLA e G. VAONA, op. cit. in ⁽²⁾, I. e II.

le equazioni di una generica t. r. o. T^* e rispettivamente della linearizzante di T e T^* .

Fissata una retta p per O , resta fissata mediante la (3) una stella $\bar{\Sigma}_2$ di centro O entro cui può essere scelta la corrispondente $\bar{p}$. Fissata $\bar{p}$ entro $\bar{\Sigma}_2$, le φ_1 , φ_2 restano assoggettate, ciascuna, ad una relazione del tipo:

$$\varphi_i(\alpha) = a_i \quad (i = 1, 2)$$

con a_i numero noto. È ovvio che, viceversa, a_1 e a_2 possono essere scelti ad arbitrio e che quindi facendo assumere ad a_1 r valori opportuni si riesce a fare assumere alle b_i valori prefissati.

Geometricamente ciò equivale a prendere r rette generiche per O e a fissare entro fasci opportuni (quelli che si ottengono dando nelle (3) a $\varphi_i(\alpha)$ i valori opportuni) le corrispondenti delle r rette e in modo arbitrario entro ciascun fascio. Si può sfruttare questa arbitrarietà per assegnare in modo opportuno le r condizioni che così si presentano nelle b_{ij} . Per completare la caratterizzazione di queste ultime possono ancora scegliersi $\binom{r}{2}$ rette per O e scegliere le corrispondenti in modo opportuno entro i fasci che ciascuna di esse determina mediante le (3), (in cui naturalmente si pensino fissate le b_{ij}), onde far assumere alle b_{ij} un sistema prefissato di valori.

4. Data una trasformazione puntuale T fra due spazi proiettivi S, S' ($r \geq 3$), sia O, O' una coppia di punti corrispondenti. Ci proponiamo di fissare riferimenti proiettivi intrinseci nella coppia O, O' . Per far ciò, dapprima fisseremo intrinsecamente una famiglia di trasformazioni razionali osculatrici T^* assoggettando a condizioni intrinseche la relativa corrispondenza linearizzante (n. 3). Dette condizioni si ottengono imponendo che nella corrispondenza linearizzante si corrispondano r coppie opportune di rette uscenti da O .

Supponiamo già fissati i riferimenti intrinseci nelle stelle di centri O, O' e siano, con le consuete notazioni:

$$(4) \quad y_s = f_{1s} + f_{2s} + \dots + f_{ks} + \dots$$

$$(5) \quad y_s = \frac{f_{1s} + f_{1s}\varphi_1 + f_{2s}}{1 + \varphi_1 + \varphi_2} \quad (s = 1, 2, \dots, r)$$

le equazioni di T e rispettivamente di una generica t. r. o. T^* . Siano poi:

$$(6) \quad \bar{\alpha}_s = f_{3s}(\alpha) + f_{2s}(\alpha)\varphi_1(\alpha) + f_{1s}(\alpha)\varphi_2(\alpha) \quad (s = 1, 2, \dots, r)$$

le equazioni della c. l. di T e T^* .

Affinchè le (6) siano compatibili considerate come equazioni nelle incognite φ_1, φ_2 (cfr. n. 2, a)), occorre e basta che la matrice:

$$(7) \quad \|\bar{\alpha}_s, f_{3s}(\alpha), f_{2s}(\alpha), f_{1s}(\alpha)\| \quad (s = 1, 2, \dots, r)$$

abbia caratteristica 3. Presa una retta $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ si sceglierà la corrispondente $\bar{p}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_r)$ in modo che questa condizione sia soddisfatta e successivamente si calcoleranno i valori di $\varphi_1(\alpha)$ e $\varphi_2(\alpha)$ mediante tre delle r equazioni (6).

Prendendo ad esempio le prime tre, si ha subito:

$$(8) \quad \varphi_1 = \frac{[\bar{\alpha}_1 f_{33}(\alpha) - \bar{\alpha}_3 f_{31}(\alpha)][\bar{\alpha}_3 f_{12}(\alpha) - \bar{\alpha}_2 f_{13}(\alpha)] - [\bar{\alpha}_2 f_{33}(\alpha) - \bar{\alpha}_3 f_{32}(\alpha)][\bar{\alpha}_3 f_{11}(\alpha) - \bar{\alpha}_1 f_{13}(\alpha)]}{[\bar{\alpha}_3 f_{21}(\alpha) - \bar{\alpha}_1 f_{23}(\alpha)][\bar{\alpha}_3 f_{12}(\alpha) - \bar{\alpha}_2 f_{13}(\alpha)] - [\bar{\alpha}_3 f_{22}(\alpha) - \bar{\alpha}_2 f_{23}(\alpha)][\bar{\alpha}_3 f_{11}(\alpha) - \bar{\alpha}_1 f_{13}(\alpha)]}$$

$$\varphi_2 = \frac{[\bar{\alpha}_3 f_{21}(\alpha) - \bar{\alpha}_1 f_{23}(\alpha)][\bar{\alpha}_2 f_{33}(\alpha) - \bar{\alpha}_3 f_{32}(\alpha)] - [\bar{\alpha}_3 f_{22}(\alpha) - \bar{\alpha}_2 f_{23}(\alpha)][\bar{\alpha}_1 f_{33}(\alpha) - \bar{\alpha}_3 f_{31}(\alpha)]}{[\bar{\alpha}_3 f_{21}(\alpha) - \bar{\alpha}_1 f_{23}(\alpha)][\bar{\alpha}_3 f_{12}(\alpha) - \bar{\alpha}_2 f_{13}(\alpha)] - [\bar{\alpha}_3 f_{22}(\alpha) - \bar{\alpha}_2 f_{23}(\alpha)][\bar{\alpha}_3 f_{11}(\alpha) - \bar{\alpha}_1 f_{13}(\alpha)]}$$

Per determinare i coefficienti b_i fisseremo r rette per O e le corrispondenti in maniera opportuna, in modo cioè da rendere soddisfatta la condizione relativa alla caratteristica della (7). Presa una retta p per O , cioè fissato un sistema di valori per α_i , si potranno fissare ad esempio, in modo arbitrario i valori dei rapporti $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_3}, \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_3}$ e determinare i valori delle altre $\bar{\alpha}_i$ dalle equazioni:

$$\begin{vmatrix} \bar{\alpha}_1, f_{31}(\alpha), f_{21}(\alpha), f_{11}(\alpha) \\ \bar{\alpha}_2, f_{32}(\alpha), f_{22}(\alpha), f_{12}(\alpha) \\ \bar{\alpha}_3, f_{33}(\alpha), f_{23}(\alpha), f_{13}(\alpha) \\ \bar{\alpha}_t, f_{3t}(\alpha), f_{2t}(\alpha), f_{1t}(\alpha) \end{vmatrix} = 0 \quad (t = 4, 5, \dots, r).$$

Geometricamente ciò significa scegliere arbitrariamente la $\bar{p}$ entro una stella (a due dimensioni) di centro O (n. 2).

Prendiamo ad esempio le r rette p^i così definite:

$$\begin{aligned} p^k: \quad & \alpha_k^k = \alpha_3^k = 1, \quad \alpha_n^k = 0 \\ & (m, n, k = 1, 2, \dots, r; n \neq 1, 3; m \neq k, 3; k \neq 3) \\ p^3: \quad & \alpha_1^3 = -\alpha_3^3 = 1, \quad \alpha_n^3 = 0 \end{aligned}$$

ed imponiamo che ad esse corrispondano rispettivamente le r

rette $\bar{p}^i$ per cui:

$$\bar{\alpha}_1^i = 0, \quad \bar{\alpha}_2^i = 2\bar{\alpha}_3^i,$$

$$\begin{vmatrix} \bar{\alpha}_1^i, & f_{31}(\alpha^i), & f_{21}(\alpha^i), & f_{11}(\alpha^i) \\ \bar{\alpha}_2^i, & f_{32}(\alpha^i), & f_{22}(\alpha^i), & f_{12}(\alpha^i) \\ \bar{\alpha}_3^i, & f_{33}(\alpha^i), & f_{23}(\alpha^i), & f_{13}(\alpha^i) \\ \bar{\alpha}_t^i, & f_{3t}(\alpha^i), & f_{2t}(\alpha^i), & f_{1t}(\alpha^i) \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} (i=1, 2, \dots, r) \\ (t=4, 5, \dots, r) \end{matrix}.$$

Si ottengono così dalla prima delle (8) le condizioni nelle b_i :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} b_1 + b_3 &= \frac{2(a^1_{111} + 3a^1_{113} + 3a^1_{133} + a^1_{333}) + a^2_{111} + 3a^2_{113} +}{D_1} \\ &\quad + \frac{3a^2_{133} + a^2_{333} - 2(a^3_{111} + 3a^3_{113} + 3a^3_{133} + a^3_{333})}{D_1} \\ b_2 + b_3 &= \frac{(a^1_{222} + 3a^1_{223} + 3a^1_{233} + a^1_{333})}{D_2} \\ -b_1 + b_3 &= \frac{2(-a^1_{111} + 3a^1_{113} - 3a^1_{133} + a^1_{333}) + a^2_{111} - 3a^2_{113} +}{D_3} \\ &\quad + \frac{3a^2_{133} - a^2_{333} + 2(-a^3_{111} + 3a^3_{113} - 3a^3_{133} + a^3_{333})}{D_3} \\ b_t + b_3 &= \frac{2(a^1_{t11} + 3a^1_{t13} + 3a^1_{t33} + a^1_{333})}{D_t} \quad (t=4, 5, \dots, r) \end{aligned} \right.$$

(ove le D_i sono denominatori, funzioni lineari non nulle delle α_i , α_{ij} di cui non interessano le espressioni esplicite). Le r condizioni che rimangono simultaneamente imposte alle b_{ij} potranno ricavarsi immediatamente dalla seconda delle (8). Per gli scopi che ci siamo prefissi, ci interessa di scriverne soltanto una, e precisamente quella relativa alla coppia p^1 , $\bar{p}^1$. Essa è la seguente:

$$(10) \quad b_{11} + 2b_{13} + b_{33} = \frac{[a^2_{13} - 2a^3_{13}][a^1_{111} + 3a^1_{113} + 3a^1_{133} + a^1_{333}]}{2a^3_{13} - a^2_{13} - 2a^1_{13}} + \\ + \frac{a^1_{13}[2(a^2_{111} + 3a^2_{113} + 3a^2_{133} + a^2_{333}) - (a^2_{111} + 3a^2_{113} + 3a^2_{133} + a^2_{333})]}{2a^3_{13} - a^2_{13} - 2a^1_{13}}.$$

La famiglia $F \propto \binom{r}{2}$ di t. r. o. così definita, ci servirà per fissare i riferimenti intrinseci in $S_{..}$, $S'_{..}$.

5. Supponiamo dapprima che la coppia O, O' sia a jacobiano nullo ⁽¹⁰⁾. Fissiamo nel modo noto ⁽¹¹⁾ i riferimenti intrinseci nelle stelle di centri O, O' . Le equazioni di T , nell'intorno di O, O' , si scrivono allora:

$$(11) \quad \begin{cases} y_s = x_s + \sum_{ij} a^s_{ij} x_i x_j + \sum_{ijl} a^s_{ijl} x_i x_j x_l + [4] \\ y_r = \sum_{ij} a^r_{ij} x_i x_j + \sum_{ijl} a^r_{ijl} x_i x_j x_l + [4] \end{cases}$$

$$(12) \quad a^n_{ij} = a^n_{ji}, \quad a^n_{ijl} = a^n_{ilj} = \dots, \quad a^r_{rr} \neq 0, \quad a^n_{ii} = 0,$$

$$\sum_{ij} a^n_{ij} = 0, \quad a^{r-1}_{r-2} = a^{r-1}_{r-2, r}$$

$$(s = 1, 2, \dots, r-1; \quad i, j, n = 1, 2, \dots, r).$$

Per completare la determinazione dei riferimenti intrinseci, basta fissare intrinsecamente l' S'_{r-1} improprio di S'_r e il punto unità in uno dei due spazi ⁽¹²⁾. Consideriamo la famiglia F di t. r. o. definita al n. 4:

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{x_s + x_s \varphi_1 + \sum_{ij} a^s_{ij} x_i x_j}{1 + \varphi_1 + \varphi_2}, \\ y_r &= \frac{\sum_{ij} a^r_{ij} x_i x_j}{1 + \varphi_1 + \varphi_2}, \\ \varphi_1 &= \sum_i b_i x_i, \quad \varphi_2 = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} i, j = 1, 2, \dots, r \\ s = 1, 2, \dots, r-1 \end{array} \right)$$

(le b_i, b_{ij} dovendo soddisfare alle condizioni dette al n. 4) e sia Q_s la quadrica che, in una qualunque t. r. o. di F , viene a corrispondere all'iperpiano coordinato $y_s = 0$ di S'_r , ($s = 1, 2, \dots, r-1$). Q_s incontra l'asse x_s nel punto O e in un altro punto la cui coordinata non nulla vale $x_s = -\frac{1}{b_s}$. Si ottengono così $r-1$ punti che possono essere assunti come punti impropri, dando luogo alle condizioni:

$$(13) \quad b_s = 0. \quad (s = 1, 2, \dots, r-1)$$

⁽¹⁰⁾ Supporremo che la caratteristica dello jacobiano sia $r-1$. Si avverta anche che per $r=3$ le condizioni (9)-(10) e quindi anche le condizioni che se ne deducono vanno leggermente modificate. Ciò può farsi immediatamente, tenendo presente che nel caso in questione si ha $f_{13}=0, a^3_{33} \neq 0$.

⁽¹¹⁾ Si veda. M. VILLA e G. VAONA, Op. cit. in ⁽²⁾ p. I.

⁽¹²⁾ M. VILLA e G. VAONA, Op. cit. in ⁽²⁾ p. II. n. 5, 6.

Resta così fissato l' S_{r-2} improprio dell' S_{r-1} : $x_r = 0$ quindi ⁽¹³⁾ l' S'_{r-2} improprio dell' S'_{r-1} stazionario di S'_r e in definitiva l'iperpiano improprio di S .

Assumendo poi in S , come punto $(1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ il punto, distinto da O , in cui Q_1 incontra la retta $x_1 = x_2, x_3 = \dots = x_r = 0$ si ha:

$$(14) \quad 2a^1_{12} = -1.$$

In S , il riferimento intrinseco è già fissato mentre occorre ancora fissare in S'_r un punto improprio non appartenente all' S'_{r-1} stazionario. Questo può farsi agevolmente al modo seguente.

Consideriamo il punto P di S_r di coordinate $x_1 = x_3 = 1, x_2 = \dots = x_i = 0$. ($i = 4, 5, \dots, r$). Ad esso viene a corrispondere in S'_r in tutte le t. r. o. di F il punto P' di coordinate:

$$y_1 = \frac{1 + 2a^1_{13}}{1 + b_{11} + 2b_{13} + b_{33}}, \quad y_2 = \frac{2a^2_{13}}{1 + b_{11} + 2b_{13} + b_{33}}, \quad y_3 = \frac{1 + a^3_{13}}{1 + b_{11} + 2b_{13} + b_{33}},$$

$$y_i = \frac{2a^i_{13}}{1 + b_{11} + 2b_{13} + b_{33}} \quad (i = 4, 5, \dots, r)$$

Il punto P' in generale, non appartiene all' S'_{r-1} stazionario.

Assunto P' come ulteriore punto improprio, si ha la condizione:

$$(15) \quad b_{11} + 2b_{13} + b_{33} = -1.$$

Il riferimento intrinseco resta così fissato anche in S'_r e le equazioni canoniche di T si deducono subito dalle (11)-(12)-(13)-(15), tenuto conto delle (9)-(10)-(14). Esse sono:

$$y_s = x_s + \sum_{ij} a^s_{ij} x_i x_j + \sum_{ijl} a^s_{ijl} x_i x_j x_l + [4]$$

$$y_r = \sum_{ij} a^r_{ij} x_i x_j + \sum_{ijl} a^r_{ijl} x_i x_j x_l + [4]$$

dove

$$a^n_{ij} = a^n_{ji}, \quad a^n_{ijl} = a^n_{jil} = \dots, \quad a^n_{ii} = 0, \quad a^r_{rr} \neq 0, \quad \sum_{ij} a^n_{ij} = 0,$$

$$a^{r-1}_{r-2, r} = a^r_{r-2, r}, \quad 2a^1_{12} = -1$$

$$a^1_{hhh} + 3a^1_{hhs} + 3a^1_{hss} + a^1_{sss} = 0, \quad a^2_{111} + 3a^2_{11s} + 3a^2_{1ss} + a^2_{sss} =$$

$$= 2(a^3_{111} + 3a^3_{11s} + a^3_{1ss} + a^3_{sss}) - 2$$

$$a^1_{111} + 3a^1_{11s} + 3a^1_{1ss} + a^1_{sss} = 1$$

$$a^2_{111} - 3a^2_{11s} + 3a^2_{1ss} - a^2_{sss} =$$

$$= 2(a^3_{111} - 3a^3_{11s} + 3a^3_{1ss} - a^3_{sss}) + 2(a^1_{111} - 3a^1_{11s} + 3a^1_{1ss} - a^1_{sss})$$

$$(i, j, l, n = 1, 2, \dots, r; \quad s = 1, 2, \dots, r-1; \quad h = 2, t; \quad t = 4, 5, \dots, r-1)$$

⁽¹³⁾ M. VILLA e G. VAONA, Op. cit in ⁽²⁾ p. I. n. 3, pag. 781 in fondo.

6. Nel caso regolare, fissiamo il riferimento in O , O' nel modo noto ⁽¹⁴⁾. La T si rappresenta allora con gli sviluppi:

$$(16) \quad y_n = x_n + \sum_{ij} a^n_{ij} x_i x_j + \sum_{ijl} a^n_{ijl} x_i x_j x_l + [4]$$

dove:

$$(17) \quad a^n_{ii} = 0; \quad \sum_{ij} a^n_{ij} = -1, \quad a^n_{ij} = a^n_{ji}, \quad a^n_{ijl} = a^n_{jil} = \dots$$

$$(i, j, n = 1, 2, \dots, r).$$

Per completare la determinazione dei riferimenti intrinseci occorre fissare intrinsecamente l'iperpiano improprio in uno dei due spazi ⁽¹⁵⁾. Fissata la famiglia F di t. r. o. come detto al n. 5, si può assumere in S_r come punto improprio dell'asse x_n , il punto distinto dall'origine in cui esso è tagliato dalla quadrica Q_n . Si ottengono così le condizioni:

$$(18) \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, r).$$

Restano così completamente fissati i riferimenti intrinseci in S_r , S'_r e dalle (16)-(17)-(18), tenuto conto delle (9), si hanno subito per la T le seguenti equazioni canoniche:

$$y_n = x_n + \sum_{ij} a^n_{ij} x_i x_j + \sum_{ijl} a^n_{ijl} x_i x_j x_l + [4]$$

dove:

$$a^n_{ii} = 0, \quad \sum_{ij} a^n_{ij} = -1, \quad a^n_{ij} = a^n_{ji}, \quad a^n_{ijl} = a^n_{jil} = \dots,$$

$$a^1_{hhh} + 3a^1_{hh3} + 3a^1_{h33} + a^1_{333} = 0$$

$$2(a^1_{111} + 3a^1_{113} + 3a^1_{133} + a^1_{333}) + a^2_{111} + 3a^2_{113} + a^2_{133} + a^2_{333} -$$

$$- 2(a^3_{111} + 3a^3_{113} + 3a^3_{133} + a^3_{333}) = 0$$

$$2(a^1_{111} - 3a^1_{113} + 3a^1_{133} - a^1_{333}) - a^2_{111} + 3a^2_{113} - 3a^2_{133} + a^2_{333} +$$

$$+ 2(a^3_{111} - 3a^3_{113} + 3a^3_{133} - a^3_{333}) = 0$$

$$(i, j, l, n = 1, 2, \dots, r; \quad h = 2, t; \quad t = 4, 5, \dots, r).$$

⁽¹⁴⁾ M. VILLA, Op. cit. in ⁽⁴⁾, p. I.

⁽¹⁵⁾ M. VILLA, Op. cit. in ⁽⁴⁾, n. 2, 3.