Renato Nardini

Su un tipo di onde magneto-idrodinamiche non omogenee.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 350–358.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_350_0>

Su un tipo di onde magneto-idrodinamiche non omogenee. (*)

Nota di Renato Nardini (a Bologna)

Sunto. - *Fissato un sistema di coordinate cilindriche in un fluido ideale, incompressibile e perfettamente conduttore, si mette in evidenza la possibilità di onde magneto-idrodinamiche che si propagano nella direzione di un preesistente campo magnetico assiale stazionario e sono costituite da un campo magnetico indotto e dalla velocità delle particelle del mezzo entrambi aventi direzione trasversa; tali onde possono essere non omogenee in quanto le dette grandezze possono dipendere dalla distanza dall' asse.*

1. **Introduzione.** – In un precedente lavoro (1), riferendosi ad un fluido non viscoso, incompressibile e di conducibilità elettrica infinita, è stata messa in evidenza la possibilità di una propagazione per onde cilindriche, in direzione radiale, di fenomeni magneto-idrodinamici concernenti grandezze dipendenti solo dal tempo e dalla distanza da un asse fisso, in presenza di un particolare campo magnetico radiale.

Qui, sempre riferendosi ad identiche proprietà del mezzo e seguendo lo schema che comporta la simmetria rispetto ad un asse, si rileva la possibilità di una propagazione di onde nella direzione di un preesistente campo magnetico assiale stazionario, nelle quali le componenti trasverse della velocità e del campo magnetico indotto, fra loro proporzionali, risultano dipendenti in modo arbitrario dalla distanza r dall'asse e dipendenti, in conformità del fenomeno di propagazione, dal tempo e dalla coordinata assiale z. Dato che, per quanto riguarda la velocità delle particelle del mezzo, un caso particolare di tale distribuzione si riscontra in un comune vortice, le onde in questione possono essere chiamate *vorticose*.

Non è escluso che lo studio di tali onde possa riuscire utile in fisica solare: è noto infatti che Alfvén e Walén (2) hanno

(*) Questo lavoro è stato oggetto di una comunicazione al IV Osterreichischer Mathematicker Kongress (Vienna 17-22 settembre 1956).

(1) R. Nardini, *Su particolari onde cilindriche della magneto-idrodinamica*, « Boll. U. M. I. » (3) **10**, 1955, 349-362.

(2) H. Alfvén, *On Sunspots and the Solar Cycle*, « Ark. f. mat., astr. o. fys. », **29** A, N° 12, 1943, *Magneto-hydrodynamic Waves and Sunspots* I e II, « Mon. Not. R. Astr. Soc. », **105**, 1945, id. Nota III, « Ark. f. mat, astr. o. fys. », **34** A, N° 23, 1948. Si veda anche il trattato *Cosmical Elektrodynamics*, « Oxford at the Clarendon Press », 1950, Cap. V.

C. Walén, *On the Theory of Sunspots*, « Ark. f. mat. astr. o. fys », **30** A, N° 15, 1944.

introdotto una teoria secondo la quale le macchie solari potrebbero essere prodotte da anelli vorticosi magneto-idrodinamici che, formatisi nella parte interna del sole, si propagano verso la periferia sotto l'azione del campo magnetico solare; i due Autori hanno appunto dimostrato che tale propagazione, ammesse determinate circostanze, è possibile almeno in linea teorica. La forma abbastanza generale delle onde qui studiate potrebbe eventualmente permettere di svincolarsi dal ristretto schema dell'anello vorticoso a cui si è accennato precedentemente, per poter considerare schemi più generali per analoghi fenomeni di propagazione.

Osserviamo infine che la dipendenza dalla distanza r delle grandezze in questione fa sì che le dette onde siano non omogenee, cioè ad un certo istante su una superficie, che precedentemente è stata fronte d'onda, tali grandezze non hanno ovunque lo stesso valore; nel caso particolare di onde sinusoidali ciò comporta, ad esempio, che le superfici di uguale fase non sono necessariamente anche superfici di uguale ampiezza, come invece avviene per le onde sinusoidali omogenee.

2. **Schema del lavoro.** – Per giungere ai risultati preannunciati si introducono anzitutto le equazioni della magneto-idrodinamica, da cui si deducono le equazioni scalari ad esse corrispondenti in un sistema di coordinate cilindriche (n. 3). Si considera poi per tali equazioni una particolare classe di soluzioni per la quale risulta agevole il calcolo esplicito del campo magnetico indotto, della velocità (n. 4) e della pressione (n. 5); esposte poi delle condizioni sufficienti a garantire l'unicità della soluzione suddetta (n. 6), si rileva il grado di generalità della stessa, accennando anche a qualche esempio concretamente realizzabile (n. 7) e a dei casi particolari, che si possono chiamare semistazionari, essendo in essi indipendente dal tempo soltanto il campo magnetico oppure soltanto la velocità (n. 8).

3. **Equazioni in coordinate cilindriche.** – Sia dato un fluido non viscoso, incompressibile, omogeneo, elettricamente conduttore, soggetto ad un campo magnetico preesistente $\boldsymbol{H}_0$, di direzione costante in tutta la regione che si considera e dipendente solamente dalla distanza r da un asse parallelo ad $\boldsymbol{H}_0$, che assumeremo qui come asse delle z.

Detta μ la permeabilità magnetica, γ la conducibilità elettrica e ρ la densità del fluido, tutte supposte costanti, siano $\boldsymbol{H}$ il campo magnetico complessivo, $\boldsymbol{v}$ la velocità della generica particella del mezzo, p la pressione; la funzione assegnata U rappresenti il potenziale delle forze esterne non elettromagnetiche che, per ipotesi, agiscono sull'unità di massa del fluido. Se, come avviene abitualmente nei casi concreti, si ritengono trascurabili gli effetti dell'eventuale densità di carica elettrica e la corrente di spostamento, le equazioni che descrivono i fenomeni magneto-idrodinamici sono le seguenti: [3]

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\gamma}\,\mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{H} + \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}) \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} + \frac{\mu}{\rho}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right) \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0. \tag{4}$$

Se la conducibilità elettrica γ si considera infinita, si può sopprimere il primo termine a secondo membro dell'equazione (1): precisamente rileviamo che l'ipotesi dell'infinita conducibilità può essere attenuata, in quanto è sufficiente ammettere che il detto termine sia trascurabile nei confronti dei rimanenti termini dell'equazione (1). Ponendosi appunto in questa ipotesi, introduciamo ora le equazioni scalari che corrispondono alle precedenti equazioni vettoriali in un sistema di coordinate cilindriche r, ϑ e z. Indicando con H_r, H_ϑ, H_z, v_r, v_ϑ e v_z le componenti dei vettori $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{v}$ nel detto sistema di coordinate, dall'equazione (1) seguono le equazioni

$$\frac{\partial H_r}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(v_r H_\vartheta - v_\vartheta H_r) - \frac{\partial}{\partial z}(v_z H_r - v_r H_z) \tag{5}$$

$$\frac{\partial H_\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(v_\vartheta H_z - v_z H_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial r}(v_r H_\vartheta - v_\vartheta H_r) \tag{6}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial r(v_z H_r - v_r H_z)}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial (v_\vartheta H_z - v_z H_\vartheta)}{\partial \vartheta}\,. \tag{7}$$

L'equazione (3) dà luogo alle equazioni

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -v_z\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{v_\vartheta}{r}\left(\frac{\partial r v_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\mu}{\rho}H_z\left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) - \frac{\mu}{\rho}\frac{H_\vartheta}{r}\left(\frac{\partial r H_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \vartheta}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right) \tag{8}$$

(3) Per il modo con cui tali equazioni sono state ricavate da quelle dell'idrodinamica e dell'elettromagnetismo rimandiamo, per esempio, al lavoro citato nella nota 1).

$$(9)\quad \frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} = -\frac{v_r}{r}\left(\frac{\partial r v_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta}\right) + v_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial z}\right) + \frac{\mu}{\rho}\frac{H_r}{r}\left(\frac{\partial r H_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \vartheta}\right) -$$

$$- \frac{\mu}{\rho} H_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial H_\vartheta}{\partial z}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right)$$

$$(10)\quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -v_\vartheta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial z}\right) + v_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\mu}{\rho} H_\vartheta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial H_\vartheta}{\partial z}\right) -$$

$$- \frac{\mu}{\rho} H_r\left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right).$$

Infine le equazioni (2) e (4) si traducono rispettivamente in

$$(11)\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r H_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial H_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

$$(12)\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,.$$

4. **Campo magnetico e velocità nelle onde vorticose.** - La trattazione delle precedenti equazioni presenta ardue difficoltà: qui ci proponiamo solo di ricavare una classe di soluzioni che soddisfano alle seguenti ipotesi semplificatrici:

a) $H_r = 0$, $H_z = H_0$, essendo, come si è già detto, H_0 funzione della sola r.

Segue dall'equazione (11) che deve essere

$$\frac{\partial H_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0\,;$$

b) $v_r = v_z = 0$: segue dall'equazione (12) che è

$$\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0\,;$$

H_ϑ e v_ϑ risultano quindi indipendenti da ϑ;

c) p ed U siano del pari indipendenti da ϑ [4].

La (5) e la (7) sono allora identicamente soddisfatte. La (6) e la

[4] Quest'ultima ipotesi potrebbe essere attenuata richiedendo soltanto che nell'equazione (9) sia $\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) = 0$; ciò non porterebbe alcuna modifica negli sviluppi successivi, salvo nella valutazione della pressione p, che verrebbe a dipendere da ϑ se ne dipende la funzione assegnata U.

(9) danno invece luogo al sistema autonomo

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_\vartheta}{\partial t} = H_0 \dfrac{\partial v_\vartheta}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\vartheta}{\partial t} = \dfrac{\mu}{\rho} H_0 \dfrac{\partial H_\vartheta}{\partial z}, \end{cases}$$

mentre le rimanenti (8) e (10) danno origine al sistema

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} - U\right) = \dfrac{v_\vartheta}{r}\dfrac{\partial r v_\vartheta}{\partial r} - \dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{H_\vartheta}{r}\dfrac{\partial r H_\vartheta}{\partial r} - \dfrac{\mu}{\rho} H_0 \dfrac{\partial H_0}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} - U\right) = v_\vartheta \dfrac{\partial v_\vartheta}{\partial z} - \dfrac{\mu}{\rho} H_\vartheta \dfrac{\partial H_\vartheta}{\partial z} \end{cases}$$

che permette il calcolo della pressione p una volta che siano note H_ϑ e v_ϑ.

Nel sistema (13) si può eliminare per esempio v_ϑ ottenendo l'equazione

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 H_\vartheta}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} H_0^2 \frac{\partial^2 H_\vartheta}{\partial z^2},$$

il cui integrale generale si può scrivere nella forma

$$(16)\qquad H_\vartheta(t, r, z) = F\left(t - \frac{z}{V}, r\right) + G\left(t + \frac{z}{V}, r\right) + f(r)$$

con F, G ed f funzioni arbitrarie dei loro argomenti e dove

$$(17)\qquad V = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, H_0(r)$$

rappresenta la velocità di propagazione delle due onde, progressiva e recessiva, fornite nell'ordine dai primi due termini a secondo membro della (16).

Introducendo tale valore di H_ϑ nel sistema (13), si ricava

$$(18)\qquad v_\vartheta(t, r, z) = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, F\left(t - \frac{z}{V}, r\right) + \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, G\left(t + \frac{z}{V}, r\right) + \varphi(r)$$

dove $\varphi(r)$ è una funzione arbitraria. v_ϑ soddisfa perciò ad un'equazione identica alla (15), come, del resto, si potrebbe dedurre immediatamente dal sistema (13).

Rileviamo che, dal punto di vista fisico, la presenza nella formula (16) della funzione arbitraria $f(r)$ e nella formula (18) dell'analoga $\varphi(r)$ sta a significare che un campo cinetico trasverso stazionario dipendente solo da r (ad esempio un moto di rotazione uniforme intorno all'asse z) non influisce sul campo magnetico, nè un campo magnetico della stessa natura (ad esempio il campo dovuto ad una corrente stazionaria che percorre l'asse delle z) influisce sulla distribuzione delle velocità. D'ora innanzi perciò prescinderemo da tali elementi, per cui supporremo senz'altro

$$f(r) \equiv \varphi(r) \equiv 0.$$

Le onde rappresentate dalla (16) e dalla (18) sono non omogenee, data la dipendenza di H_ϑ e di v_ϑ da r; notiamo infine che se H_0 è indipendente da r, la velocità di propagazione V è la stessa in tutti i punti e le superfici d'onda sono in tale caso i piani di equazione $z = Vt$; in caso contrario la velocità di propagazione varia con la distanza r dall'asse z e la superficie d'onda all'istante t è rappresentata dall'equazione

$$z = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, H_0(r)t. \tag{19}$$

5. **Calcolo della pressione.** – Il calcolo della pressione risulta molto semplice quando sussiste una sola delle due onde [5]; tenendo conto che in tale caso è

$$\frac{\rho v_\vartheta^2}{2} = \frac{\mu H_\vartheta^2}{2},$$

le (14) possono essere semplificate nel seguente modo

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left[p - \rho U + \frac{\mu}{2}\left(H_\vartheta^2 + H_0^2\right)\right] = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial z}\left[p - \rho U + \frac{\mu}{2} H_\vartheta^2\right] = 0\,; \end{aligned}\right. \tag{20}$$

si osservi che la seconda relazione non si altera se si aggiunge entro parentesi il termine $\frac{\mu}{2} H_0^2$ che dipende solo da r: da entrambe allora si deduce

$$p(t,\, r,\, z) - \rho U + \frac{\mu}{2}\,(H_\vartheta^2 + H_0^2) = \psi(t), \tag{21}$$

dove la funzione arbitraria $\psi(t)$ si specifica se in un dato punto è assegnata la pressione in funzione del tempo.

Il significato fisico della (21) è che la somma della pressione, dell'energia potenziale e dell'energia magnetica totale è costante

(5) Notiamo che quando esistono entrambe le onde il calcolo della pressione è più complesso in quanto, per la non linearità del sistema (14), non c'è la sovrapposizione degli effetti.

in tutto lo spazio e può variare solo in funzione del tempo. L'energia magnetica totale può, in virtù della (19), essere sostituita dalla somma dell'energia cinetica e della sola energia magnetica dovuta al campo primario H_0.

6. **Condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione.** - Per ottenere condizioni sufficienti affinchè la soluzione, rappresentata dalle formule (16), (18) e (21), sia unica, richiamiamo un precedente teorema [6] secondo il quale in una certa regione S limitata dalla superficie σ non possono avere più di una soluzione le equazioni (1), (2), (3) e (4) qualora siano assegnati:

a) all'istante iniziale i valori di $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{v}$ in tutto S;

b) in ogni istante alla superficie σ i valori del campo magnetico tangenziale, mentre sia nulla la componente normale della velocità $\boldsymbol{v}$;

c) in ogni istante la pressione p in un determinato punto.

d) Se la regione S si estende all'infinito, occorrono inoltre delle condizioni di convergenza; indicando con $\boldsymbol{H}_1$ e $\boldsymbol{v}_1$ la differenza fra due soluzioni che soddisfino alle precedenti condizioni, per poter dimostrare che, anche in una regione illimitata qualsiasi, è $H_1 \equiv v_1 \equiv 0$, è sufficiente, per esempio, che $\boldsymbol{H}_1$ e $\boldsymbol{v}_1$ siano all'infinito infinitesimi di ordine maggiore di due; ciò si ottiene se si richiede che all'infinito $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{v}$, liberati da un'eventuale componente stazionaria assegnata, tendano con ordine maggiore di due ad un valore assegnato [7].

In ogni caso la soluzione va intesa rappresentata da funzioni continue assieme alle derivate parziali prime e seconde.

Affinchè rientri nel teorema generale la soluzione che è stata precedentemente ricavata, che limiteremo, per brevità, al caso della sola onda progressiva e che perciò è rappresentata da

$$H_\vartheta = F\left(t - \frac{z}{V}, \ r\right).$$

$$v_\vartheta = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, F\left(t - \frac{z}{V}, \ r\right),$$

([6]) R. Nardini, *Due teoremi di unicità nella teoria delle onde magnetoidrodinamiche*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », 21, 1952, 303-315

([7]) Dicendo che all'infinito un vettore $u(P)$ tende ad un valore assegnato u_∞ con ordine n intendiamo che sia

$$\lim_{P \to \infty} r^n \mid u(P) - u_\infty \mid = M,$$

dove M è un numero positivo ed r la distanza di P da un punto P_0 prefissato, oppure, com'è nel caso presente, da un asse z prefissato.

essendo F una funzione continua assieme alle sue derivate parziali prime e seconde, è sufficiente considerare, per esempio, una regione S limitata dal piano $z = 0$ e dal piano $z = z_1$, essendo z_1 sufficientemente grande in modo che, nel periodo di tempo considerato $0 \leq t \leq T$ (con T arbitrario), un fenomeno, che parta dal piano $z = 0$ e che si propaghi con velocità V, non possa raggiungere il piano $z = z_1$. Allora per assicurare l'unicità della detta soluzione è sufficiente che sia:

a) all'istante iniziale $v = 0$ ed $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0(r)$;

b) per $z = 0$, $H_r = 0$, $H_\vartheta = F(t, r)$ e $v_z = 0$; per $z = z_1$, $H_r = H_\vartheta = v_z = 0$; nessuna ulteriore condizione occorre per la v_ϑ che, ovviamente, è sempre tangente ai due piani che costituiscono il contorno;

c) $p = p_0(t)$ in un punto P_0 prefissato;

d) $F(t, r)$ per $r \rightarrow +\infty$ tenda ad un valore $F_\infty(t)$ con ordine maggiore di due ([8]).

7. **Osservazioni sulla soluzione.** - La forma della soluzione qui ricavata e fornita dalle (16), (18) e (21), presenta un certo grado di generalità, sopratutto perchè è arbitraria la dipendenza dalla distanza r sia del campo magnetico primario $\boldsymbol{H}_0$ (e perciò della velocità di propagazione) sia della soluzione stessa. Osserveremo però che, nei casi pratici, $\boldsymbol{H}_0$ sarà uniforme, mentre la possibilità che $\boldsymbol{H}_0$ dipenda da r ha interesse prevalentemente concettuale. Appunto con $\boldsymbol{H}_0$ uniforme si può pensare di assegnare ad ogni istante sul piano $z = 0$ un campo magnetico trasverso H_ϑ inversamente proporzionale ad r: questo si propaga assialmente accompagnato anche da un moto circolare delle particelle del fluido con velocità del pari inversamente proporzionale ad r.

Giova rilevare anche che nel sistema (13), coefficienti a parte, H_ϑ e v_ϑ hanno ruoli che, nel procedimento adottato per giungere alla soluzione, possono essere scambiati: tale scambio dei ruoli può di conseguenza avvenire anche nelle condizioni iniziali e al contorno e nell'espressione finale della soluzione ([9]); segue che, quale condizione al contorno sul piano $z = 0$ può essere assegnata

([8]) Se, anzichè riferirsi alle equazioni generali (1), (2), (3) e (4), ci si riferisce alle equazioni semplificate (13) e (14), si può facilmente dimostrare che è sufficiente supporre che $F(t, r)$ tenda ad $F_\infty(t)$ con ordine maggiore di uno per $r \rightarrow +\infty$.

([9]) Si veda un esempio analogo nel caso piano esposto nel lavoro R. Nardini, *Soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica*, « Ann. di Mat. pura e appl. », (4) **35**, 1953, 269-290.

v_ϑ in funzione di r e del tempo t, anzichè H_ϑ. Per esempio sul detto piano può essere assegnata una rotazione non uniforme del liquido, che si può pensare limitato lateralmente da una superficie cilindrica circolare; tale rotazione, in presenza del campo magnetico H_0, si propaga assialmente assieme ad un campo magnetico H_ϑ la cui intensità è, in ogni istante, e ad una data quota, proporzionale alla distanza r.

Da questi esempi risulta allora la possibilità che tali onde vorticose riescano utili in fisica solare, come è stato accennato nell'introduzione.

8. **Soluzioni semistazionarie.** – Per il sistema (13) sono immediatamente calcolabili le soluzioni, che chiameremo semistazionarie, in cui una sola delle due funzioni H_ϑ e v_ϑ dipendono dal tempo.

Se, per esempio, è $\frac{\partial H_\vartheta}{\partial t} = 0$, se ne deduce immediatamente

$$\frac{\partial v_\vartheta}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial t^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 H_\vartheta}{\partial z^2} = 0\,,$$

da cui

$$v_\vartheta(t, r) = \frac{\mu}{\rho} H_0(r) m(r) t\,, \quad H_\vartheta(r, z) = m(r) z\,, \tag{22}$$

dove sono state trascurate le solite funzioni additive arbitrarie contenenti la sola r ed $m(r)$ è una funzione arbitraria.

Se è invece $\frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} = 0$, le soluzioni corrispondenti sono del tipo

$$H_\vartheta(t, r) = H_0(r) n(r) t\,, \quad v_\vartheta(r, z) = n(r) z\,, \tag{23}$$

con $n(r)$ funzione arbitraria.

Tali soluzioni mettono in evidenza la possibilità, prevalentemente concettuale, di ottenere un determinato campo magnetico facendo assumere al liquido un moto corrispondente e viceversa. Per esempio, in base alla (22), un campo magnetico stazionario fa assumere al liquido, fermo all'istante $t = 0$, un moto che, ad una prefissata distanza dall'asse, risulta uniformemente accelerato ([10]).

([10]) Si può facilmente verificare che la variazione dell'energia cinetica che si produce nel liquido contenuto in un determinato volume, corrisponde al flusso di energia elettromagnetica attraverso la superficie che limita il volume stesso.