Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Caprioli

Onde e. m. di tipo trasversale nelle guide d'onda rettilinee e con dielettrico eterogeneo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 200–202.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_200_0>

Onde e. m. di tipo trasversale nelle guide d'onda rettilinee e con dielettrico eterogeneo

Nota di LUIGI CAPRIOLI (a Bologna)

Sunto. - *Cfr. il seguente capoverso 1.*

1. Il Prof. F. SBRANA ha giustamente rilevato [1] che dalle relazioni (8), (9), (10), della mia nota « *Onde e. m. di tipo trasversale nelle guide d' onda rettilinee e con dielettrico eteronegeo* » [2] non può diret-

[1] E desidero porgergli qui vive grazie per la segnalazione verbale fattamene.

[2] A questo lavoro, presentato al IV Congresso dell' U. M. I. (Taormina, 1954) e pubblicato in quegli Atti (Cremonese, Roma 1953, pag. 478) è fatto qui implicito riferimento: esso verrà citato con (A). Per comodità del lettore riporto qui sotto le ricordate relazioni (8), (9), (10):

$$[(\mathrm{grad}_\sigma \psi_1 - \mathrm{grad}_\sigma \psi_2) \times \bar{t}]_{s'} = 0, \tag{8}$$

$$[(\varepsilon_1 \,\mathrm{grad}_\sigma \psi_1 - \varepsilon_2 \,\mathrm{grad}_\sigma \psi_2) \times \bar{n}]_{s'} = 0, \qquad (\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2), \tag{9}$$

$$\left[\left(\mathrm{grad}_\sigma \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \mathrm{grad}_\sigma \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right) \times \bar{n}\right]_{s'} = 0, \tag{10}$$

nelle quali:

- ψ_1, ψ_2 sono (cfr. (A), nota (8)) funzioni del tipo

$$\psi_1(x, y, z) = \Phi_1(x, y) e^{i\beta_1 z} + F_1(z), \quad \psi_2(x, y, z) = \Phi_2(x, y) e^{i\beta_2 z} + F_2(z) \tag{a}$$

con Φ_1, Φ_2 funzioni armoniche delle variabili x, y; β_1 e β_2 $(\neq \beta_1)$ costanti; ed F_1, F_2 funzioni della sola z.

- $\bar{t}$, $\bar{n}$ sono i versori della tangente e della normale all'arco s' comune ai contorni s_1, s_2 di due domini (piani) S_1, S_2 appartenenti alla generica sezione normale di una guida d' onda (cilindrica, con generatrici parallele all' asse z) nella quale il dielettrico ha costante dielettrica ε_1 in S_1 ed ε_2 $(\neq \varepsilon_1)$ in S_2.

tamente dedursi, come è impropriamente affermato nel testo, che sono identicamente nulli, in ogni punto dell' arco s', i due vettori, ivi uguali, $\mathrm{grad}_\sigma \frac{\partial\psi_1}{\partial z}$, $\mathrm{grad}_\sigma \frac{\partial\psi_2}{\partial z}$ [3]. Potrebbe quindi apparire infirmabile il risultato, di portata affatto generale, che costituisce oggetto di quel lavoro ed al quale ero peraltro pervenuto anche per via diversa: cioè che è impossibile la propagazione di modi TEM in guide d' onda nelle quali il dielettrico sia comunque eterogeneo (trasversalmente).

Ora, questo risultato è invece esatto; ed anche la tesi che le funzioni $\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$, $\frac{\partial\psi_2}{\partial z}$ sono indipendenti dalle variabili x, y nei loro campi di definizione S_1, S_2 può dedursi dalla sola ipotesi che siano identici, in ogni punto dell' arco s' di una generica sezione della guida, i due vettori $\mathrm{grad}_\sigma \frac{\partial\psi_1}{\partial z}$, $\mathrm{grad}_\sigma \frac{\partial\psi_2}{\partial z}$.

2. Si consideri la funzione

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \tag{1}$$

che, per quanto è ricordato in nota (2) (cfr. rel. (a)), è armonica rispetto alle variabili x, y nel dominio $S_1 + S_2$ di una generica sezione normale della guida. La relazione

$$\left[\mathrm{grad}_\sigma \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right]_{s'} \equiv \left[\mathrm{grad}_\sigma \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right]_{s'}, \tag{2}$$

immediata conseguenza delle (8), (10), mostra che la funzione (1) è costante lungo l' arco s' ed ha ivi derivata normale (all' arco stesso) nulla: essa è dunque costante (cioè indipendente da x ed y) in tutto il dominio $S_1 + S_2$. Può allora scriversi, detta z la quota di una generica sezione della guida e $K(z)$ una funzione di sola z (cfr. le (a)):

$$\beta_1\Phi_1 e^{i\beta_1 z} - \beta_2\Phi_2 e^{i\beta_2 z} = K(z), \tag{3}$$

[3] L' operatore grad_σ è riferito alle variabili x, y.

e, in particolare, per $z = 0$,

$$\beta_1 \Phi_1 - \beta_2 \Phi_2 = K(0). \tag{4}$$

Dal confronto delle (3), (4) segue subito che entrambe le funzioni Φ_1, Φ_2 sono necessariamente costanti nei loro domini di definizione; e ciò basta per concludere, in accordo con quanto è detto in (A), che le funzioni $\frac{\partial \psi_1}{\partial z}$, $\frac{\partial \psi_2}{\partial z}$ sono indipendenti dalle variabili x, y; condizione, questa, sufficiente per dedurre che è identicamente nullo nel dominio $S_1 + S_2$, il vettore elettrico del campo (e quindi quello magnetico; cfr. (A)).

3. A questa conclusione poteva del resto pervenirsi anche direttamente [4]: tenuto conto infatti delle (a), la (2), scritta con riferimento a due sezioni di quote diverse, ad es., 0 e z $(\neq 0)$ fornisce le relazioni

$$[\beta_1 \operatorname{grad}_\sigma \Phi_1]_{s'(0)} = [\beta_2 \operatorname{grad}_\sigma \Phi_2]_{s'(0)}$$

$$[\beta_1 e^{i\beta_1 z} \operatorname{grad}_\sigma \Phi_1]_{s'(z)} = [\beta_2 e^{i\beta_2 z} \operatorname{grad}_\sigma \Phi_2]_{s'(z)}$$

dalle quali, per essere $\beta_1 \neq \beta_2$, segue subito che entrambi i vettori $\operatorname{grad} \Phi_1$, $\operatorname{grad} \Phi_2$ sono nulli in ogni punto del contorno s'; le funzioni Φ_1, Φ_2, armoniche nelle x, y, sono dunque costanti su s' ed ivi con derivate normali nulle. Esse si riducono pertanto a delle costanti; e ciò basta per provare che il vettore elettrico del campo è identicamente nullo nel dominio $S_1 + S_2$.

[4] Cioè senza prendere in esame le fuzioni $\frac{\partial \psi_1}{\partial z}$, $\frac{\partial \psi_2}{\partial z}$; come è stato fatto, invece, più sopra ed anche nella nota (A); allo scopo evidente, in quest'ultima, di ricondurre la questione ivi trattata nel n. 2 a quella del n. 1.