Bollettino
Unione Matematica Italiana

Tino Zeuli

Alcune considerazioni sulle equazioni della elettrodinamica nei corpi in moto traslatorio uniforme.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 189–197.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_189_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Alcune considerazioni sulle equazioni della elettrodinamica nei corpi in moto traslatorio uniforme.

Nota di TINO ZEULI (a Torino)

Sunto. - *Come al n. 1.*

1. - È noto che se si considera un corpo C in moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità costante $\vec{v}$ rispetto ad un sistema inerziale $S(x, y, z)$, nell'ipotesi che esso sia elettricamente e magneticamente omogeneo e isotropo anche dal punto di vista della conducibilità elettrica, ed il suo comportamento elettromagnetico sia definito dalle costanti ε, μ, σ, allora, con riferimento ad un altro sistema inerziale $S'(x', y', z')$ collegato col corpo mobile C, i fenomeni elettromagnetici in esso sono retti dalle equazioni di MAXWELL, che usando la metrologia gaussiana ed indicando con un apice le grandezze elettromagnetiche che in esse figurano, riferite ad S', sono [1]:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = -c \operatorname{rot}_{P'} \vec{E}', \\[2mm] \dfrac{\partial \vec{D}'}{\partial t} + \vec{J}' = c \operatorname{rot}_{P'} \vec{H}', \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \operatorname{div}_{P'} \vec{B}' = 0, \\ \operatorname{div}_{P'} \vec{D}' = \rho', \end{cases}$$

$$(3)\qquad \vec{B}' = \mu \vec{H}' \quad , \quad \vec{D}' = \varepsilon \vec{E}' \quad , \quad \vec{J}' = \sigma \vec{E}',$$

dove gli operatori differenziali $\operatorname{rot}_{P'}$, $\operatorname{div}_{P'}$ sono valutati considerando variabile il punto P'.

Con riferimento, invece, al sistema inerziale $S(x, y, z)$, rispetto al quale le grandezze elettromagnetiche le indichiamo ora senza apice, esse verificheranno le equazioni di MINKOWSKI, da questi ottenute applicando la legge fondamentale di covarianza delle equazioni maxwelliane (1), (2), rispetto alle trasformazioni di LORENTZ, e cioè

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{E}, \\[2mm] \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} = c \operatorname{rot} \vec{H}, \end{cases} \qquad (5)\quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \end{cases}$$

[1] A. SOMMERFELD, *Electrodynamics*, P. IV, § 34 (New York, N. Y. Acad. Press Inc. Publisers, 1952).

dove è

$$(6)\qquad \begin{cases} \vec{D} + \dfrac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{H} = \varepsilon\left(\vec{E} + \dfrac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}\right), \\ \vec{B} - \dfrac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E} = \mu\left(\vec{H} - \dfrac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{D}\right), \end{cases}$$

$$(7)\qquad \vec{J} - \rho\vec{v} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right], \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right),$$

e si ha inoltre

$$(8)\qquad \rho' = \left[\rho - \frac{1}{c^2}\,\vec{v} \times \vec{J}\right] / \sqrt{1-\beta^2},$$

dove $\vec{v} \times \vec{J} \,/\, c^2$ rappresenta la densità di carica di conduzione.

Ora, affrancandomi da ogni ipotesi semplificativa, mi propongo di stabilire innanzitutto, in questa nota, un'equazione differenziale alla quale deve soddisfare la densità di carica ρ' rispetto al sistema inerziale S' e di assegnare quindi la sua espressione generale, da cui risulta che rispetto al sistema S la ρ' si propaga nella direzione del moto con velocità v e con un coefficiente temporale di smorzamento uguale ad $e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}\sqrt{1-\beta^2}\,t}$.

In secondo luogo mi propongo di stabilire per le grandezze elettromagnetiche $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{E}$ delle equazioni differenziali che definiscono la loro propagazione nel corpo mobile C. Esse, nel caso particolare di un corpo dielettrico, in cui si supponga nulla la conduttività elettrica σ e nulla le corrente di conduzione $\vec{J}$, si riducono all'equazione trasformata delle onde stabilita dal Prof. LAMPARIELLO ([2]), Nel caso invece in cui si suppongano nulle tanto la densità di carica ρ' rispetto al sistema S', quanto la densità di carica ρ rispetto al sistema S, si ha l'equazione da me stabilita in un precedente lavoro ([3]). Nel caso infine in cui si supponga nulla soltanto la densità ρ' si trovano le equazioni recentemente trovate dal Dott. G. CARINI ([4]).

([2]) G. LAMPARIELLO, *L'equazione generale delle onde elettromagnetiche dei corpi in moto*, («Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei», serie VIII, vol. XVII).

([3]) T. ZEULI. *Sui fenomeni elettromagnetici nei corpi omogenei elettricamente conduttori, in moto traslatorio uniforme*, («Rendiconti del Seminario Mat. dell'Università e del Politecnico di Torino», vol. 17, anno 1954-55).

([4]) G. CARINI, *Sulle equazioni di Minkowski per i conduttori in moto*, («Rendic. dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere», vol. LXXXVIII, a. 1955).

2. - Dall' equazione (7) si ricava

$$\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sigma}(\vec{J} - \rho\vec{v}) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c}, \tag{9}$$

e moltiplicando ambo i membri di questa scalarmente per $\vec{v}/c$, tenendo conto delle (8), si ricava ancora

$$\vec{E} \times \frac{\vec{v}}{c} = \frac{c}{\sigma}(\rho\sqrt{1-\beta^2} - \rho') \tag{10}$$ [5].

Sostituendo nella (9) si ha

$$\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\sigma}(\sqrt{1-\beta^2}\,\vec{J} - \rho'\vec{v}) \tag{11}$$

e quindi, per la prima delle (6),

$$\vec{D} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{H} = \frac{\varepsilon}{\sigma}(\sqrt{1-\beta^2}\,\vec{J} - \rho'\vec{v}). \tag{11'}$$

Prendendo la divergenza (rispetto al punto $P(x, y, z)$) di ambo i membri di questa equazione, ricordando che $\vec{v}$ è un vettore costante ed avendo riguardo alla seconda delle equazioni (4), si ottiene,

$$\operatorname{div} \vec{D} - \left(\frac{\partial \vec{D}}{dt} + \vec{J}\right) \times \frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{\varepsilon}{\sigma}(\sqrt{1-\beta^2} \operatorname{div} \vec{J} - \operatorname{grad} \rho' \times \vec{v}).$$

Ma dalla (8) si ha

$$\vec{J} \times \vec{v} = c^2(\rho - \rho'\sqrt{1-\beta^2})$$

e dalla prima delle (6) in virtù della (10) si ricava

$$\vec{D} \times \vec{v} = \varepsilon\,\vec{E} \times \vec{v} = \frac{\varepsilon c^2}{\sigma}(\rho\sqrt{1-\beta^2} - \rho');$$

ne segue

$$\operatorname{div} \vec{D} - \frac{\varepsilon}{\sigma}\left(\sqrt{1-\beta^2}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\partial\rho'}{\partial t}\right) - (\rho - \rho'\sqrt{1-\beta^2}) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{\sigma}(\sqrt{1-\beta^2} \operatorname{div} \vec{J} - \operatorname{grad} \rho' \times \vec{v}),$$

[5] Da questa equazione si deduce che nell'ipotesi che sia $\rho' = 0$ e $\rho = 0$, si ha $\vec{E} \times \vec{v} = 0$, cioè *il campo elettrico risulta trasversale*, ciò che è conforme al risultato ottenuto in altro modo nella mia nota citata precedentemente.

cioè, per la seconda delle (5), ed osservando che prendendo la divergenza di ambo i membri della seconda delle (4), si ha

$$\frac{\partial \operatorname{div} \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0,$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho' \times \vec{v} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sqrt{1-\beta^2}\, \rho' = 0 \tag{12}$$

che è l'equazione che volevamo stabilire, alla quale deve soddisfare la densità delle cariche ρ' riferite al sistema inerziale S', e nella quale il gradiente di ρ' va calcolato con riferimento al sistema inerziale $S(x, y, z)$.

L'equazione (12) si integra immediatamente osservando che se si pone

$$\rho' = \rho^*(x, y, z, t)\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}\sqrt{1-\beta^2}\, t}$$

si ha per ρ^* l'equazione

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho^* \times \vec{v} = 0,$$

cioè, scegliendo l'asse x nella direzione del moto, si ha

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + v \frac{\partial \rho^*}{\partial x} = 0$$

il cui integrale è della forma

$$\rho^* = \rho^*(x - vt, y, z).$$

Risulta allora

$$\rho' = \rho^*(x - vt, y, z)\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}\sqrt{1-\beta^2}\, t}, \tag{13}$$

dove $\rho^*(x, y, z)$ rappresenta la distribuzione spaziale delle cariche nell'istante iniziale, nel quale istante supponiamo che i due riferimenti $S'(x', y', z')$, $S(x, y, z)$ coincidano. Le cariche ρ', riferite al sistema inerziale S', si propagano dunque nella direzione del moto con velocità v e con un fattore di smorzamento che si annulla soltanto quando la conducibilità elettrica σ è infinita, oppure la costante dielettrica è nulla.

3. - Per ricavare ora le equazioni alle quali devono soddisfare separatamente le grandezze elettromagnetiche $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{E}$ osser-

viamo intanto che risolvendo le (6) rispetto ad $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ si ricava

$$(14)\qquad \begin{cases} \vec{E} = \mu(k_0 + k_1\alpha)\vec{D} - k_2 \dfrac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}, \\ \vec{H} = \varepsilon(k_0 + k_1\alpha)\vec{B} + k_2 \dfrac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{D}, \end{cases}$$

dove per semplicità si è posto

$$(15)\qquad k_0 = \frac{1-\beta^2}{\varepsilon\mu - \beta^2}\ ,\quad k_1 = \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu(\varepsilon\mu - \beta^2)}\ ,\quad k_2 = \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu - \beta^2} = \varepsilon\mu k_1 = 1 - k_0$$

e si è indicata con α la *diade* $H\left(\dfrac{\vec{v}}{c}, \dfrac{\vec{v}}{c}\right)$, tale che, per esempio,

$$\alpha\vec{D} = H\left(\frac{\vec{v}}{c}, \frac{\vec{v}}{c}\right)\vec{D} = \vec{D} \times \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{v}}{c}.$$

Ora, in virtù delle (5), e tenendo conto del valore di ρ che si ricava dalle (10), si ha

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}\right) = -\frac{d\vec{B}}{dP}\frac{\vec{v}}{c},$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{D}\right) = \left(\operatorname{div}\vec{D} - \frac{d\vec{D}}{dP}\right)\frac{\vec{v}}{c} = \left(\rho - \frac{d\vec{D}}{dP}\right)\frac{\vec{v}}{c} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon c^2}\vec{D} \times \vec{v} + \rho'\right)\frac{\vec{v}}{c} - \frac{d\vec{D}}{dP}\frac{\vec{v}}{c} = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\alpha\vec{D} + \rho'\vec{v}\right) - \frac{d\vec{D}}{dP}\frac{\vec{v}}{c}$$

e dalla (14) si ricava pertanto

$$(16)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = \mu \operatorname{rot}\left[(k_0 + k_1\alpha)\vec{D}\right] + k_2 \dfrac{d\vec{B}}{dP} \cdot \dfrac{\vec{v}}{c}, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon \operatorname{rot}\left[(k_0 + k_1\alpha)\vec{B}\right] + \dfrac{k_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\alpha\vec{D} + \rho'\vec{v}\right) - k_2\dfrac{d\vec{D}}{dP}\dfrac{\vec{v}}{c}. \end{cases}$$

Si ha d'altra parte dalla (11)

$$(17)\qquad \vec{J} = \frac{\rho'\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\mu(k_0 + k_1\alpha)\vec{D} + k_0\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}\right]$$

e le equazioni (4) in virtù della (16) e (17) diventano

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + k_2 \frac{d\vec{B}}{dP}\vec{v} = -\mu c \operatorname{rot}\,[(k_0 + k_1\alpha)\vec{D}\,],\\
&\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + k_2 \frac{d\vec{D}}{dP}\vec{v} + \frac{\sigma\mu k_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{D} = \varepsilon c \operatorname{rot}\,[(k_0 + k_1\alpha)\,\vec{B}\,] - \\
&\qquad - \frac{\sigma k_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B} - \frac{k_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\rho'\vec{v}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ponendo ancora

$$
(19)\qquad \gamma = k_0 + k_1\alpha \quad , \quad \eth = \frac{\partial}{\partial t} + k_2 \frac{d}{dP}\vec{v},
$$

essendo γ un operatore omografico e $\eth$ un operatore differenziale, combinazione lineare del simbolo di derivazione rispetto al tempo e del simbolo di derivazione rispetto al punto $P(x, y, z)$ nella direzione $\vec{v}$, definito dalla relazione

$$
\frac{d}{dP}\vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z},
$$

dove v_x, v_y, v_z sono le componenti cartesiane del vettore $\vec{v}$, le equazioni (18) si possono anche scrivere

$$
(20)\qquad \eth\,\vec{B} = -\mu c \operatorname{rot}(\gamma\,\vec{D}\,),
$$

$$
(21)\qquad \eth\,\vec{D} + \frac{\sigma\mu k_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{D} = \varepsilon c \operatorname{rot}(\gamma\,\vec{B}\,) - \frac{\sigma k_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B} - \frac{k_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\rho'\vec{v}.
$$

Applicando a sinistra di ambo i membri della (21) l'operatore γ, prendendo quindi il rotore di ambo i membri, tenendo conto della (20), osservando che, per essere α omografia costante, gli operatori γ e $\eth$ sono permutabili, e che inoltre

$$
\operatorname{rot}(\gamma\eth\,\vec{D}\,) = \operatorname{rot}(\eth\gamma\,\vec{D}\,) = \eth \operatorname{rot}(\gamma\,\vec{D}\,),
$$

$$
\gamma\left(\frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B}\right) = k_0 \frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B},
$$

$$
\operatorname{rot}\left[\gamma\left(\frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B}\right)\right] = k_0 \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B}\right) = k_0\left(\operatorname{div}\vec{B} - \frac{d\vec{B}}{dP}\right)\frac{\vec{v}}{c} = -k_0\frac{d\vec{B}}{dP}\frac{\vec{v}}{c},
$$

$$
\gamma\,\vec{v} = \left(k_0 + k_1\frac{v^2}{c^2}\right)\vec{v} = (k_0 + \beta^2 k_1)\,\vec{v} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\vec{v},
$$

si ottiene

$$\Im^2 \vec{B} + \frac{\sigma\mu k_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Im \vec{B} + \varepsilon\mu c^2 \operatorname{rot}[\gamma \operatorname{rot}(\gamma \vec{B})] + \tag{22}$$
$$+ \frac{\sigma\mu k_0^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\vec{B}}{dP} \vec{v} - \frac{ck_0}{\varepsilon\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{grad} \rho' \wedge \vec{v} = 0.$$

Ora si ha

$$\gamma \operatorname{rot}(\gamma \vec{B}) = k_0^2 \operatorname{rot} \vec{B} + k_0 k_1 [\alpha \operatorname{rot} \vec{B} + \operatorname{rot}(\alpha \vec{B})] + k_1^2 \alpha \operatorname{rot}(\alpha \vec{B});$$

ma

$$\alpha \operatorname{rot}(\alpha \vec{B}) = \alpha \operatorname{rot}\left(\vec{B} \times \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right) = \alpha\left[\operatorname{grad}\left(\vec{B} \times \frac{\vec{v}}{c}\right) \wedge \frac{\vec{v}}{c}\right] = 0$$

ed

$$\alpha \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{B} \times \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{v}}{c} = \left[(\operatorname{rot} \vec{B}) \wedge \frac{\vec{v}}{c}\right] \wedge \frac{\vec{v}}{c} + \frac{v^2}{c^2} \operatorname{rot} \vec{B},$$

$$\operatorname{rot}(\alpha \vec{B}) = \operatorname{rot}\left(\vec{B} \times \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right) = \operatorname{grad}\left(\vec{B} \times \frac{\vec{v}}{c}\right) \wedge \frac{\vec{v}}{c},$$

perciò

$$\gamma \operatorname{rot}(\gamma \vec{B}) = (k_0^2 + k_0 k_1 \beta^2) \operatorname{rot} \vec{B} + k_0 k_1 \left[(\operatorname{rot} \vec{B}) \wedge \frac{\vec{v}}{c} + \operatorname{grad}\left(\vec{B} \times \frac{\vec{v}}{c}\right)\right] \wedge \frac{\vec{v}}{c} =$$
$$= \frac{k_0}{\varepsilon\mu}\left[\operatorname{rot} \vec{B} + k_2 \left(\frac{d\vec{B}}{dP} \frac{\vec{v}}{c}\right) \wedge \frac{\vec{v}}{c}\right]$$

e quindi

$$\operatorname{rot}[\gamma \operatorname{rot}(\gamma \vec{B})] = \frac{k_0}{\varepsilon\mu}\left\{\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{B} + k_2 \operatorname{rot}\left[\left(\frac{d\vec{B}}{dP} \frac{\vec{v}}{c}\right) \wedge \frac{\vec{v}}{c}\right]\right\}$$

cioè, osservando che

$$\operatorname{rot}\left[\left(\frac{d\vec{B}}{dP} \frac{\vec{v}}{c}\right) \wedge \frac{\vec{v}}{c}\right] = \frac{d^2\vec{B}}{dP^2} \frac{\vec{v}}{c} \frac{\vec{v}}{c} - \operatorname{div}\left(\frac{d\vec{B}}{dP} \frac{\vec{v}}{c}\right) \frac{\vec{v}}{c}$$

e che

$$\operatorname{div}\left(\frac{d\vec{B}}{dP} \frac{\vec{v}}{c}\right) = \frac{d \operatorname{div} \vec{B}}{dP} \frac{\vec{v}}{c} = 0,$$

risulta

$$\operatorname{rot}[\gamma \operatorname{rot}(\gamma \vec{B})] = \frac{k_0}{\varepsilon\mu}\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{B} + k_2 \frac{d^2\vec{B}}{dP^2} \frac{\vec{v}}{c} \frac{\vec{v}}{c}\right].$$

Sostituendo nella (22) dopo facili trasformazioni e semplificazioni si ha infine

$$(23)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta_2 \vec{B} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2(1-\beta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{dP}\vec{v}\right)^2 \vec{B} +$$

$$+ \frac{\sigma\mu}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{dP}\vec{v}\right)\vec{B} = \frac{1}{c\varepsilon\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{grad}\,\rho' \wedge \vec{v},$$

che è l'equazione che si voleva stabilire per il vettore $\vec{B}$.

Assumendo l'asse x nella direzione del moto, cioè nella direzione della velocità costante $\vec{v}$, si ha ancora

$$(23')\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta_2 \vec{B} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2(1-\beta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \vec{B} +$$

$$+ \frac{\sigma\mu}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{B} = \frac{1}{c\varepsilon\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{grad}\,\rho' \wedge \vec{v},$$

dove, a norma della (13), il vettore a secondo membro è noto, quando si conosca la distribuzione iniziale delle cariche elettriche.

Ad un'equazione analoga alla (23) soddisfa il vettore $\vec{D}$ del campo: essa si ottiene applicando a sinistra di ambo i membri della (20) l'operatore γ e prendendo poi il rotore di ambo i membri. Con calcoli analoghi ed osservando che è ora:

$$\mathrm{rot}\,[\gamma\,\mathrm{rot}\,(\gamma\vec{D})] = \frac{k_0}{\varepsilon\mu}\left\{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{D} + k_2\,\mathrm{rot}\left[\left(\frac{d\vec{D}}{dP}\frac{\vec{v}}{c}\right)\wedge\frac{\vec{v}}{c}\right]\right\},$$

$$\mathrm{rot}\left[\left(\frac{d\vec{D}}{dP}\frac{\vec{v}}{c}\right)\wedge\frac{\vec{v}}{c}\right] = \frac{d^2\vec{D}}{dP^2}\frac{\vec{v}}{c}\frac{\vec{v}}{c} - \frac{d\,\mathrm{div}\,\vec{D}}{dP}\frac{\vec{v}}{c}\frac{\vec{v}}{c},$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\rho' + \frac{\sigma}{\varepsilon c^2}\vec{D}\times\vec{v}\right)$$

e

$$\frac{d\,\mathrm{div}\,\vec{D}}{dP}\frac{\vec{v}}{c} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{D})\times\frac{\vec{v}}{c} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\mathrm{grad}\,\rho' + \frac{\sigma}{c^2\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,(\vec{D}\times\vec{v})\right]\times\frac{\vec{v}}{c},$$

si perviene all'equazione

$$(24)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} - \Delta_2 \vec{D} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2(1-\beta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{dP}\vec{v}\right)^2 \vec{D} +$$

$$\frac{\sigma\mu}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{dP}\vec{v}\right)\vec{D} = -\frac{1}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}\vec{v} + c^2\,\mathrm{grad}\,\rho'\right).$$

4. - Le equazioni (23) e (24) nel caso particolare in cui le cariche ρ' siano nulle, salvo le differenti notazioni, si riducono a quelle stabilite da G. CARINI nella nota citata. Da essa risulta che in generale i vettori $\vec{D}$ e $\vec{B}$ del campo non soddisfano ad una stessa equazione differenziale: ciò avviene soltanto per $\rho' = 0$. Poichè, come si è visto ρ' si propaga nella direzione del moto del corpo C considerato con la velocità v di questo e con un fattore di smorzamento $e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}\sqrt{1-\beta^2}\,t}$, si ha che i vettori $\vec{B}$, $\vec{D}$ daranno luogo a propagazione ondosa (in generale smorzata), che sarà la sovrapposizione di quella determinata dalle cariche ρ e di quella definita dall'equazione differenziale:

$$\Lambda_2 \Phi \equiv \left\{ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_2 + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2(1-\beta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{dP}\vec{v}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma\mu}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{dP}\vec{v}\right)\right\}\Phi = 0, \tag{25}$$

cui soddisfano le componenti dei vettori $\vec{B}$, $\vec{D}$ in assenza delle cariche ρ'.

Osserviamo ancora che, scegliendo per semplicità l'asse x nella direzione del moto del corpo C, dalle (14) si ricavano per le componenti del campo elettromagnetico i seguenti valori:

$$\left\{\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\varepsilon} D_x, \\ E_y &= \mu k_0 D_y + k_2\beta B_z, \\ E_z &= \mu k_0 D_z - k_2\beta B_y, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{\mu} B_x, \\ H_y &= \varepsilon k_0 B_y - k_2\beta D_z, \\ H_z &= \varepsilon k_0 B_z + k_2\beta D_y, \end{aligned}\right.$$

e, tenendo conto di queste, dalle (23) e (24) si ricavano per i vettori $\vec{E}, \vec{H}$ del campo elettromagnetico le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \Lambda_2 \vec{E} &= -\frac{1}{\varepsilon c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}\vec{v} + c^2 \operatorname{grad}\rho'\right), \\ \Lambda_2 \vec{H} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{grad}\rho' \wedge \frac{\vec{v}}{c}, \end{aligned} \tag{26}$$

dove Λ_2 è l'operatore differenziale del 2° ordine che nella (25) è racchiuso tra graffe. Confrontando con le equazioni (23) e (24) si ha

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\varepsilon\vec{B} - \vec{H}) &= 0, \\ \Lambda_2(\vec{D} - \varepsilon\vec{E}) &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Dunque, mentre nel caso più generale i vettori $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$, del campo soddisfano alle equazioni non omogenee (23), (24) e (26), i vettori $\varepsilon\vec{B} - \vec{H}$ e $\vec{D} - \varepsilon\vec{E}$ verificano invece l'equazione omogenea (25) che si può considerare l'equazione delle onde elettromagnetiche nei corpi in moto traslatorio uniforme con velocità costante $\vec{v}$ rispetto ad un riferimento inerziale $S(x, y, z)$.