# Bollettino Unione Matematica Italiana



Dragoslav S. Mitrinovitch


## Compléments au Traité de Kamke. Nota III.


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **11** (1956), n.2, p. 168–171.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_168_0>

# Compléments au Traité de Kamke.

Nota III di DRAGOSLAV S. MITRINOVITCH (a Belgrado)

**Sunto.** - *Nous pensons publier une série de Notes ayant pour but de combler des lacunes dans le Recueil d'équations différentielles inséré au Traité de* KAMKE {cf. [1], p. 289-660}, *de compléter des résultats y signalés, de rectifier quelques indications bibliographiques, etc.*

*Nous allons indiquer aussi plusieurs procédés permettant une formation systématique des équations différentielles, d'une forme donnée par avance, équations s'intégrant soit par quadratures, soit par fonctions spéciales (fonctions de* BESSEL, *de* LEGENDRE, *etc.).*

*La Note I paraîtra dans le* Jahresbericht der Deutschen - Mathematiker Vereinigung, *tandis que la Note II sera insérée au* Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de Serbie.

**1.** Envisageons l'équation différentielle du premier ordre

$$x^{\alpha}y^{\beta}(y')^{\gamma}+Ay^{\lambda}(y')^{\mu}+Bx^{\nu}=0, \tag{1}$$

où $x>0$, $y>0$, $y'=dy/dx>0$ et où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $A$, $B$ sont des constantes réelles, telles que

$$AB\neq 0,\quad |\alpha|+|\nu|>0,\quad |\beta|+|\lambda|>0,\quad |\gamma|+|\mu|>0. \tag{2}$$

Les cas mis à part à l'aide des conditions (2) sont simples et ils sont omis dans ce qui suit.

Le changement des variables

$$x=e^{\xi},\ y=e^{k\xi}\eta(\xi),\ \text{avec}\ \eta'=d\eta/d\xi, \tag{3}$$

$k$ étant un paramètre à déterminer, transforme l'équation (1) en

$$\begin{aligned}\eta^{\beta}(k\eta+\eta')^{\gamma}\exp\{k(\beta+\gamma)+\alpha-\gamma-\nu\}\xi\\ +A\eta^{\lambda}(k\eta+\eta')^{\mu}\exp\{k(\lambda+\mu)-(\mu+\nu)\}\xi+B=0.\end{aligned} \tag{4}$$

En supposant qu'on ait

$$k(\beta+\gamma)+\alpha-\gamma-\nu=0,\ k(\lambda+\mu)-\mu-\nu=0, \tag{5}$$

l'équation (4) prend la forme

$$\eta^{\beta}(k\eta+\eta')^{\gamma}+A\eta^{\lambda}(k\eta+\eta')^{\mu}+B=0, \tag{6}$$

où la variable $\xi$ ne figure pas explicitement.

Une analyse du système d'équations (5) conduit aux conclusions que voici:

1° Si l'on admet

$$\beta+\gamma\neq 0,\ (\beta+\gamma)(\mu+\nu)+(\lambda+\mu)(\alpha-\gamma-\nu)=0, \tag{7}$$

on a

$$k=(\gamma-\alpha+\nu)/(\beta+\gamma); \tag{8}$$

2° Dans le cas où

$$\beta+\gamma=0,\ \lambda+\mu\neq 0,\ \alpha-\gamma-\nu=0, \tag{9}$$

on a

$$k=(\mu+\nu)/(\lambda+\mu); \tag{10}$$

3° En admettant que

$$\beta+\gamma=0,\ \lambda+\mu=0,\ \alpha-\gamma-\nu=0,\ \mu+\nu=0,$$

le paramètre $k$ est arbitraire.

Dans ce dernier cas (cas 3°), l'équation (1) prend la forme

$$x^{\lambda-\beta}(y/y')^{\beta}+A(y/y')^{\lambda}+Bx^{\lambda}=0$$

et elle se réduit à une équation de la forme

$$y'=yf(x). \tag{11}$$

Plus généralement, l'équation (1) se ramène à une équation de la forme (11), si l'on admet seulement

$$\gamma=-\beta,\ \mu=-\lambda$$

mais les conditions complémentaires

$$\alpha=-\beta+\lambda,\ \nu=\lambda$$

doivent être satisfaites pour ramener l'équation (1) à l'équation (6), où la variable indépendante n'intervient pas explicitement.

**2.** Récemment { cf. [2] } nous avons indiqué un procédé fournissant l'intégration par quadratures de l'équation différentielle

$$(y')^m+axy^{n-1}y'+by^n=0, \tag{12}$$

$(a,\ b,\ m,\ n$ constantes avec $m\neq n)$, qui s'écrit aussi sous la forme

$$y^{1-n}(y')^{m-1} + by(y')^{-1} + ax = 0, \tag{13}$$

ce qui fait voir que l'équation (12) est un cas particulier de (1).

En comparant la dernière équation avec (1), on obtient

$$\alpha = 0,\ \beta = 1 - n,\ \gamma = m - 1,\ \lambda = 1,\ \mu = -1,\ \nu = 1.$$

Pour l'équation (13) toutes les conditions (7) sont vérifiées et ici $k = m/(m - n)$.

Si $m = n$, l'équation (12) rentre dans le type (11).

**3.** Pour l'intégration de l'équation (6) on peut utiliser le procédé suivant.

Si l'on pose

$$k\eta + \eta' = t\eta^{\sigma}, \tag{14}$$

où $\sigma$ est un paramètre à déterminer et $t$ une nouvelle variable, l'équation (6) devient

$$t^{\gamma}\eta^{\beta+\gamma\sigma} + At^{\mu}\eta^{\lambda+\mu\sigma} + B = 0. \tag{15}$$

Nous allons choisir $\sigma$ de sorte que

$$\beta + \gamma\sigma = \lambda + \mu\sigma;$$

on en déduit

$$\sigma = (\lambda - \beta)/(\gamma - \mu), \qquad \gamma \neq \mu. \tag{16}$$

Par suite, on fournit [1]

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \{ - B/(t^{\gamma} + At^{\mu}) \}^{(\gamma-\mu)/(\gamma\lambda-\mu\beta)} \\ \xi(t) &= \int_{t_0}^{t} d\eta/(t\eta^{\sigma} - k\eta) + \text{const.} \end{aligned} \tag{17}$$

Ce qui précède s'énonce comme suit:

Si les conditions (7) sont satisfaites, $k$ et $\sigma$ ayant les expressions respectives (8) et (16), avec $\gamma \neq \mu$, $\gamma\lambda - \beta\mu \neq 0$, la solution de l'équation (6) est définie par les relations (17). Or, la solution possède la forme

$$\xi = \xi(t), \qquad \eta = \eta(t),$$

[1] $t_0$ désigne une constante numérique, convenablement choisie.

ce qui, en vertu des formules (3), fournit enfin la solution de l'équation proposée.

**4.** Le procédé indiqué dans le § 1 de cette Note s'applique aussi à des équations plus générales de la forme

$$(18) \qquad \sum_{n=1}^{N} A_n x^{\alpha_n} y^{\beta_n} (y')^{\gamma_n} = 0, \qquad (N \text{ nombre naturel}),$$

dans les cas où les paramètres $A_n$, $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ satisfont à quelques relations.

Dans le Traité de KAMKE on trouve seulement quelques équations très particulières appartenant au type (18) pour $N = 4$.

Il serait intéressant et fort utile d'étudier le cas général en question dans le but de compléter le Traité de KAMKE.

**5.** Les faits précédents sont élémentaires, mais ils peuvent présenter un intérêt si l'on veut compléter le Recueil d'équations de KAMKE. En effet, chez KAMKE on peut énumérer à peine une vingtaine d'équations particulières de la forme (1), si l'on ne tient pas compte des équations de LAGRANGE, et des équations homogènes de même forme (1), mais toutes ces équations sont intégrées par divers artifices. Les équations en question sont numérotées dans [1] comme suit :

1.385, 1.386, 1.397, 1.404, 1.413, 1.414,
1.415, 1.455, 1.457, 1.470, 1.476, 1.487,
1.525, 1.527, 1.541, 1.542, 1.550, 1,554 (²).

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] E. KAMKE, *Differentialgleichungen : Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, 1942, Leipzig.

[2] D. S. MITRINOVITCH, *Sur une équation différentielle du premier ordre* (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker — Vereinigung, Bd. 58, 1955, S. 1 (kursiv)).

(²) Relativement à l'équation 1.554 { cf. [1], p. 381 } il faut rectifier la faute d'impression suivante : au lieu de $y = Cx^{1/n}$ lire $y = Cnx^{1/n} - C^n$.