LUIGI CASTOLDI

Sulla distribuzione dei tempi di estinzione nelle discendenze biologiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 158–167.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_158_0>

Sulla distribuzione dei tempi di estinzione nelle discendenze biologiche.

Nota di LUIGI CASTOLDI (a Cagliari)

Sunto. - *Si determina il comportamento dell'ordine medio della generazione di estinzione* (« Tempo medio di estinzione ») *della discendenza maschile da un capostipite, in relazione al valor medio* m *della distribuzione del numero dei discendenti nella prima generazione. Si dimostra che tal tempo medio è finito per* m > 1, *infinito per* m ≥ 1. *Analoghe alternative si stabiliscono per la varianza e per i successivi momenti dell' ordine della generazione di estinzione.*

1. Premessa e scopo del lavoro.

Il problema della distribuzione probabilistica del numero dei discendenti maschi da un capostipite nelle successive generazioni, impostato dapprima da FRANCIS GALTON [1] alla fine del secolo scorso, è stato completamente risolto da J. F. STEFFENSEN [2] soltanto nel 1930.

Esso consiste sostanzialmente [3] nella determinazione delle probabilità

$$(1) \qquad \left[\begin{array}{l} \overset{(r)}{p_j} \qquad (r = 1, 2, ...; \; j = 0, 1, 2, ...) \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overset{(r)}{p_j} = 1 \end{array}\right.$$

che la r-esima generazione di discendenti contenga j maschi ($j = 0, 1, 2, ...$); oppure equivalentemente, in una caratterizzazione delle successive distribuzioni di probabilità (processo stocastico) entro le singole corrispondenti generazioni maschili [4]

[1] F. GALTON (1889), *Natural Inheritance*, London.

[2] I. F. STEFFENSEN (1930), *Om Sandsinligheden for at Afkommet udder*, « Mat. Tidssch. » B. 19.

[3] Per tutti i richiami dei paragrafi 1 e 2 mi riferisco all' opera di M. S. BARTLETT (1955), *An Introduction to Stocastic Processes*, Cambridge.

[4] Nel seguito ometterò l' aggettivo « *maschile* », non importando, limitatamente al presente problema, gli elementi di altro sesso delle successive generazioni.

Di fatto, la complessità della formulazione esplicita delle probabilità (1) consiglia di attenersi alla seconda alternativa; e, in questo indirizzo, è possibile, come si richiamerà, ottenere risultati espressivi in relazione almeno ai primi momenti (valori medi e varianze) di quelle distribuzioni.

In questo stesso ordine di idee appare diverso il problema — altrimenti risolto in una col precedente — di caratterizzare le distribuzioni temporali degli ordini di generazione in relazione con un prefissato numero j di discendenti; in particolare la distribuzione dell'ordine di generazione in corrispondenza al quale si verifica l'estinzione della discendenza ($j=0$).

È a quest'ultimo problema e, particolarmente allo studio del valor medio e dei successivi momenti della distribuzione dell'ordine di estinzione, che è dedicata la parte costruttiva del presente scritto.

2. **Ricostruzione di risultati noti.**

A) *La matrice Markoviana di discendenza*

Denoterò con

$$(2_1) \qquad \left[\begin{aligned} G(z) &\equiv \overset{(1)}{G}(z) \equiv \overset{(1)}{p}_0 + \overset{(1)}{p}_1 z + \overset{(1)}{p}_2 z^2 + \ldots = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \overset{(1)}{p}_j z^j \end{aligned}\right.$$

la funzione generatrice di probabilità (p. g. f.) della distribuzione del numero dei discendenti da un unico capostipite nella prima generazione.

Per la discendenza da k capostipiti identici si otterrebbe $G^k(z)$ come p. g. f. della prima generazione.

Segue di qui che la p. g. f. della distribuzione dei discendenti da un unico capostipite, alla seconda generazione, è:

$$(2_2) \qquad \begin{aligned} \overset{(2)}{G}(z) &= \overset{(1)}{p}_0 + \overset{(1)}{p}_1 G(z) + \overset{(1)}{p}_2 G^2(z) + \ldots = \\ &= G[G(z)] \equiv G^{[2]}(z), \end{aligned}$$

e, in generale, in capo a r generazioni:

$$(2_r) \qquad \overset{(r)}{G}(z) = G\{G[\ldots G(z)]\} \equiv G^{[r]}(z),$$

dove l'esponente dell'ultimo membro denota l'ordine di iterazione operativa.

Il processo stocastico descritto è di tipo Markoviano permanente, con corrispondente matrice costruita, come si vedrà, cogli elementi della distribuzione $\overset{(1)}{p}$ relativa alla prima generazione.

Introdotti i vettori di distribuzione (a infinite componenti)

$$\text{(3)}\qquad \left[\begin{array}{l} \overset{(r)}{p}{}' \equiv (\overset{(r)}{p}_0,\ \overset{(r)}{p}_1, \ldots, \overset{(r)}{p}_j, \ldots) \\ \qquad (r = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \end{array}\right.$$

e detta Q la nominata matrice Markoviana (a infinite righe e colonne) si ha precisamente:

$$\text{(4)}\qquad \overset{(r)}{p} = Q^r \overset{(1)}{p}.$$

Quanto a Q stessa, che dirò *matrice Markoviana di discendenza*, un calcolo algebrico elementare mostra che è:

$$Q \equiv (q_{ij})_{[i,j=0,1,2,\ldots]} =$$

$$\text{(5)}\qquad = \begin{bmatrix} 1 & \overset{(1)}{p}_0 & \overset{(1)}{p}_0{}^2 & \overset{(1)}{p}_0{}^3 & \cdots \\ 0 & \overset{(1)}{p}_1 & 2\overset{(1)}{p}_1 \overset{(1)}{p}_0 & 3\overset{(1)}{p}_1 \overset{(1)}{p}_0{}^2 & \cdots \\ 0 & \overset{(1)}{p}_2 & \overset{(1)}{p}_1{}^2 + 2\overset{(1)}{p}_0 \overset{(1)}{p}_2 & 3(\overset{(1)}{p}_0 \overset{(1)}{p}_1{}^2 + \overset{(1)}{p}_0{}^2 \overset{(1)}{p}_2) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix},$$

l' elemento q_{ij} denotando in genere la probabilità che j discendenti di una data generazione diano luogo a i discendenti nella generazione successiva.

Si noterà che q_{ij} è un polinomio omogeneo di grado j e isobarico di peso i nelle $\overset{(1)}{p}_j$ e che il numero dei termini distinti in esso è uguale al numero delle possibili partizioni distinte di i (in parti intiere, compreso lo zero).

B) *La probabilità di estinzione a termine (entro una assegnata generazione).*

Denoterò con $\overset{(r)}{p}_0$ la probabilità della estinzione della discendenza entro la r-esima generazione.

Avendo riguardo al carattere positivo di $G(z)$ e di tutte le sue derivate successive nell'intervallo (0, 1), dalle relazioni (2) si trae:

$$\text{(6)}\qquad \left[\begin{array}{l} \overset{(1)}{p}_0 = G(0)\,;\quad \overset{(2)}{p}_0 = G^{[2]}(0) = G(\overset{(1)}{p}_0) > \overset{(1)}{p}_0\,; \\ \overset{(3)}{p}_0 = G^{[3]}(0) = G(\overset{(2)}{p}_0) > \overset{(2)}{p}_0\,; \ldots \end{array}\right.$$

Risulta di qui, ed è illustrato nella figura 1, che al divergere di r, $\overset{(r)}{p_0}$ converge crescendo verso un limite $\overset{(\infty)}{p_0} \leqq 1$, coincidente colla più piccola, z_m, delle due radici (distinte o no; di cui una, in ogni caso, è $z_M = 1$) dell'equazione

$$G(z) = z. \tag{7}$$

Si noterà che la coincidenza $z_m = z_M = 1$ si verifica sempre e soltanto se è

$$m = \left[\frac{dG(z)}{dz}\right]_{z=1} \leqq 1 \tag{8}$$

cioè non maggiore di 1 il numero medio dei discendenti nella prima generazione.

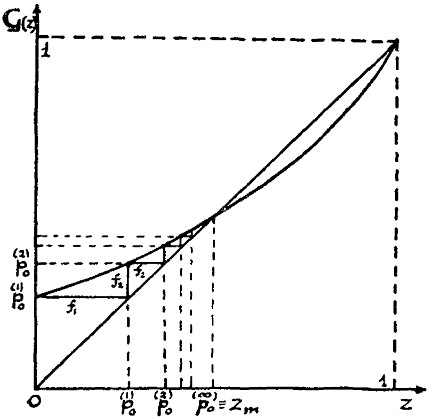

Fig. 1

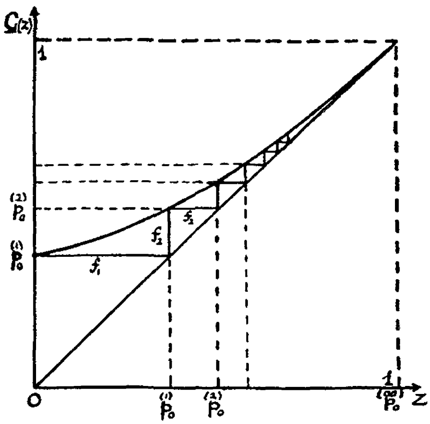

Fig. 2

Si trovano infine facilmente, utilizzando la natura moltiplicativa dell'algoritmo di formazione della r-esima p. g. f. (2,), le seguenti espressioni del valor medio e della varianza del numero dei discendenti nella r-esima generazione;

$$\left|\begin{array}{l} m_r = m^r \\ v_r = \begin{cases} m^{r-1}(1-m^r)\,\dfrac{v}{1-m} & (m \neq 1) \\ rv & (m = 1) \end{cases} \end{array}\right. , \quad v = v_1 \tag{9}$$

3. La probabilità di estinzione in capo ad un esatto numero di generazioni.

Da (4) e (5) si traggono formule ricorrenti per le successive probabilità di estinzione a termine. Precisamente si ottiene:

$$(10)\quad \begin{cases} \overset{(1)}{p_0} = \overset{(1)}{p_0} \\ \overset{(2)}{p_0} = \overset{(1)}{p_0} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \overset{(1)}{p_j}\ \overset{(1)}{p_0}{}^{j} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \overset{(r)}{p_0} = \overset{(r-1)}{p_0} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \overset{(r-1)}{p_j}\ \overset{(1)}{p_0}{}^{j} \\ \cdots\cdots\cdots , \end{cases}$$

dove le successive sommatorie denotano rispettivamente le probabilità di estinzione della discendenza esattamente in capo a due a tre, ..., a r generazioni. Se si osserva poi che $\overset{(1)}{p_0}$ stessa rappresenta una tale probabilità per la prima generazione, si riconosce l'opportùnità di una denominazione uniforme f, per tali grandezze.

Porrò dunque:

$$(11)\quad \begin{cases} f_1 = \overset{(1)}{p_0} \\ f_r = \overset{(r)}{p_0} - \overset{(r-1)}{p_0} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \overset{(r-1)}{p_j}\ \overset{(1)}{p_0}{}^{j} \\ \qquad (r = 2,\ 3, \ldots) \end{cases}$$

Si ha in tal modo, in luogo di (10):

$$(12)\quad \overset{(r)}{p_0} = \sum_{s=1}^{r} f_s \qquad (r = 1,\ 2, \ldots)$$

e

$$(13)\quad z_m = \overset{(\infty)}{p_0} = \sum_{r=1}^{\infty} f_r$$

4. Il tempo medio di estinzione.

Denoterò con N la variabile stocastica consistente nell'ordine della generazione di esatta estinzione. Per il suo valor medio $E(N)$, che dirò brevemente « *tempo medio di estinzione* », si ha ovviamente

$$(14)\qquad E(N)=\left[\sum_{r=1}^{\infty} f_r\right]^{-1}\cdot\sum_{r=1}^{\infty} r f_r=\frac{1}{\overset{(\infty)}{p_0}}\sum_{r=1}^{\infty} r f_r=$$

$$=\frac{1}{\overset{(\infty)}{p_0}}\sum_{j=1}^{\infty}\overset{(1)}{p_0^{\,j}}\sum_{r=1}^{\infty} r\overset{(r-1)}{p_j}\,.$$

Importa riconoscere in quali circostanze tal tempo medio riesca o meno di valore infinito. Ciò dipende, come si vedrà, esclusivamente dal valor medio m del numero dei discendenti nella prima generazione, secondo le alternative $m \geqq 1$ o $m < 1$.

A) Per $m>1$, è $z_m \equiv \overset{(\infty)}{p_0} < 1$ e positiva la probabilità $\overset{(\infty)}{q_0} = 1 - \overset{(\infty)}{p_0}$ di non-estinzione. Detto $E_e(N)$ il tempo medio condizionale di estinzione (a priori finito o no) per le discendenze che si estinguono, ed $E_{\bar{e}}(N)$ l'analogo tempo medio condizionale (ovviamente infinito) per le restanti, si ha:

$$(15)\qquad \left[\begin{array}{c} E(N)=z_m E_e(N)+(1-z_m)E_{\bar{e}}(N)=\infty \\ m>1 \end{array}\right.$$

B) L' esame del caso $m=1$ si semplifica trattando dapprima l'alternativa di eccezione in cui è $v=0$. Avendosi, in tale ipotesi, $z_m=0$, è ancora applicabile la formula (15) e l'argomentazione svolta a proposito di essa, concludendosi che è ancor qui $E(N)=\infty$.

Ritenuto ormai v finito e non nullo, denotiamo con m_2 il secondo momento della distribuzione (2_1) attorno all'origine e ricordiamo che è

$$(16)\qquad \left[\begin{array}{l} \left[\dfrac{dG(z)}{dz}\right]_{z=1} \equiv m = 1 \\[2ex] \left[\dfrac{d^2G(z)}{dz^2}\right]_{z=1} \equiv m_2 - m \equiv v^2 + m^2 - m = v^2. \end{array}\right.$$

Ciò consente di scrivere il seguente sviluppo di $G(z)$ nell' intorno di $z=1$:

$$(17)\qquad G(z)=z+\frac{1}{2}v^2(z-1)^2+o\binom{2}{z-1}\ \text{(5)}.$$

(5) Qui e in seguito espressioni del tipo $o\binom{\alpha}{x}$ denotano funzioni di x infinitesime di ordine superiore ad α rispetto ad x per $x \to 0$.

La funzione

$$H(z) \equiv G(z) - z$$

è pertanto infinitesima del second' ordine rispetto ad $1 - z$ per z tendente ad 1.

Avendosi ora (figura 2):

$$\text{(19)} \qquad \left[\begin{array}{l} f_r = H\overset{(r-1)}{(p_0)} = H\left(\sum\limits_{j=1}^{r-1} f_j\right) \\ \overset{(\infty)}{p_0} = \sum\limits_{j=1}^{(\infty)} f_j \equiv 1, \end{array} \right.$$

si conclude che è anche f_r infinitesima del second' ordine rispetto a $1 - \overset{(r-1)}{p_0}$, per r tendente a ∞. Detto pertanto α l'ordine di infinitesimo di f_r — certo maggiore di 1, per la convergenza di (13) — ed ε quello del resto r-esimo $R_r = 1 - \overset{(r-1)}{p_0} = \sum\limits_{j=r}^{\infty} f_j$ della serie (19), computati entrambi rispetto all'infinitesimo di confronto $\frac{1}{r}$, deve essere altresì

$$\text{(20)} \qquad \alpha = 2\varepsilon.$$

D'altra parte, dall'ipotesi

$$\text{(21)} \qquad R_r = \frac{k}{r^\varepsilon} + o\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \\ \overline{r} \end{pmatrix} \qquad (k \text{ costante finita} = 0),$$

differenziando con decremento unitario per r si trae:

$$\text{(22)} \qquad f_r = \frac{k\varepsilon}{r^{1+\varepsilon}} + o\begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix},$$

e pertanto

$$\text{(23)} \qquad \alpha = 1 + \varepsilon.$$

Dal confronto dei risultati (20) e (23) segue infine:

$$\text{(24)} \qquad \varepsilon = 1, \quad \alpha = 2,$$

cioè f_r della forma

$$\text{(25)} \qquad f_r = \frac{k}{r^2} + o\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Si riconosce così — a riprova — convergente la serie (13): divergente per contro, come dotata di termine generico positivo del prim' ordine in $\frac{1}{r}$, la serie.

$$E(N) = \sum_{r=1}^{\infty} r f_r \tag{26}$$

cui ora si riduce (14).

È dunque $E(N) = \infty$ anche per $m = 1$ e $v \neq 0$.

C) Venendo al caso $m < 1$, denoterò anzitutto con N_r la variabile stocastica rappresentativa del numero dei discendenti dell' r-esima generazione. Utilizzando una nota disuguaglianza di TCHEBICHEFF, si trova dapprima:

$$P(N_r - m_r \geqq k v_r) \leqq \frac{1}{k^2} \quad (^6), \tag{27}$$

indi, con $\varepsilon > 0$ reale qualunque:

$$P[N_r - m_r \geqq (r+1)^{1+\frac{\varepsilon}{2}} v_r] \leqq \frac{1}{(r+1)^{2+\varepsilon}}. \tag{28}$$

Avendosi ora, in virtù di (9), per ogni $\varepsilon > 0$ finito:

$$\lim_{r \to \infty} (r+1)^{1+\frac{\varepsilon}{2}} v_r = 0 \qquad (m < 1), \tag{29}$$

è possibile determinare, in corrispondenza ad ogni intero j positivo non nullo, un intero $r_0(j/\varepsilon)$ cosifatto che, per $r > r_0$ risulti

$$(r+1)^{1+\frac{\varepsilon}{2}} v_r < j \qquad [r > r_0(j/\varepsilon)]. \tag{30}$$

Sarà anzi ovviamente possibile precisare $r_0(j/\varepsilon)$ quale funzione decrescente di j, cosicchè sia, per ogni $j \geqq 1$,

$$r_0(j/\varepsilon) \leqq r_0(1/\varepsilon) \equiv r_0(\varepsilon). \tag{31}$$

Da (28) segue allora, a più forte ragione

$$\overset{(r-1)}{p_j} \leqq \frac{1}{r^{2+\varepsilon}} \qquad \begin{bmatrix} r > r_0(\varepsilon) \\ j \geqq 1 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

([6]) Scritture della forma $P(\alpha \geqq \beta)$ significano: probabilità che risulti α non minore di β.

Assumendo qui, per esempio, $\varepsilon = 1$, moltiplicando per r e sommando, si ha subito

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} r\, p_j^{(r-1)} &\leqq \sum_{r=1}^{r_0(1)} r p_j^{(r-1)} + \sum_{r=r_0(1)}^{\infty} \frac{1}{r^2} \\ &< \sum_{r=1}^{r_0(1)} r + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{r_0(1)[r_0(1)-1]}{2} + \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned} \tag{33}$$

Le serie interne in (14)

$$a_j \equiv \sum_{r=1}^{\infty} r\, p_j^{(r-1)} \tag{34}$$

convengono pertanto a somme finite, uniformemente limitate in j; fatto questo che assicura, nella presente ipotesi, un valore finito di $E(N)$.

Vale la pena di rilèvare che alla medesima conclusione si perviene, con argomentazione più diretta, come segue. Si riprenda la p. g. f. (2_1) e si osservi che, in conseguenza della concavità di $G(z)$ — riconosciuta in 2, *B*) e visivamente rappresentata nelle figure 1 e 2 — si ha in generale:

$$\frac{f_r}{f_{r-1}} = \frac{p_0^{(r)} - p_0^{(r-1)}}{p_0^{(r-1)} - p_0^{(r-2)}} = \frac{\Delta G(z)}{\Delta z} \qquad (\Delta z = f_{r-1}), \tag{35}$$

e pertanto

$$\lim_{r \to \infty} \frac{f_r}{f_{r-1}} = \left[\frac{dG(z)}{dz}\right]_{z=z_m} \tag{36}$$

Nell'attuale ipotesi (figura 1), implicante $z_m < 1$, è anche, come subito si riconosce

$$\left[\frac{dG(z)}{dz}\right]_{z=z_m} < 1 \tag{37}$$

e quindi

$$\lim_{r \to \infty} \frac{f_r}{f_{r-1}} < 1. \tag{38}$$

Di qui si trae pure

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r f_r}{(r-1) f_{r-1}} < 1, \tag{39}$$

e infine la convergenza della serie a termini positivi

$$E(N) = \frac{1}{\overset{(\infty)}{p_0}} \sum_{r=1}^{\infty} r f_r . \tag{14}$$

Concludendo: *Il tempo medio di estinzione* E(N) *è*

$$\left[\begin{array}{l} \textit{finito} \quad \textit{per}\ \mathrm{m} < 1 \\ \textit{infinito}\ \textit{per}\ \mathrm{m} \geqq 1 \end{array}\right. \tag{40}$$

pur con certezza asintotica di estinzione nel caso $m = 1$, $v \neq 0$.

5. I successivi momenti della distribuzione degli ordini di estinzione.

Introdotto il secondo momento della distribuzione degli ordini di estinzione

$$m_2(N) = \sum_{r=1}^{\infty} r^2 f_r , \tag{41}$$

è ovviamente $m_2(N) = \infty$ per $m \geqq 1$, per cui è già $E(N) = \infty$.

Per $m > 1$, si riprendano, per esempio, le argomentazioni del paragrafo 4, C), assumendovi $\varepsilon = 2$. Si ottiene così, in luogo di (32) e (33):

$$\overset{(r-1)}{p_j} \leqq \frac{1}{r^4} \qquad \begin{bmatrix} r > r_0(2) \\ j \geqq 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} r^2 \overset{(r-1)}{p_j} &\leqq \sum_{r=1}^{r_0(2)} r^2 \overset{(r-1)}{p_j} + \sum_{r=r_0(1)}^{\infty} \frac{1}{r^2} \\ &< \sum_{r=1}^{r_0(2)} r^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{6} r_0(2)[r_0(2)+1][2r_0(2)+1] + \frac{\pi^2}{6} , \end{aligned} \tag{43}$$

risultato che assicura il valor finito di $m_2(N)$.

Alla stessa conclusione si perviene utilizzando la relazione (38) e osservando che è pure

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r^2 f_r}{(r-1)^2 f_{r-1}} < 1. \tag{44}$$

Similmente si riconosce il valor finito di tutti i successivi momenti della distribuzione negli ordini di estinzione per $m > 1$ e il corrispondente divergere per $m \geqq 1$.