Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Classificazione delle trasformazioni puntuali di 3ª specie fra piani.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 141–149.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_141_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Classificazione delle trasformazioni puntuali di 3^a specie fra piani

Nota di MARIO VILLA (a Bologna)

Sunto. - *Si classificano le trasformazioni puntuali di 3^a specie fra piani in base alle corrispondenze linearizzanti relative alle trasformazioni stesse e alle trasformazioni quadratiche ad esse osculatrici.*

1. - Ho già avuto occasione di rilevare come per la classificazione delle trasformazioni puntuali fra piani si possano utilizzare le corrispondenze linearizzanti relative alle trasformazioni stesse e alle trasformazioni quadratiche ad esse osculatrici [1].

In questa Nota viene fatta appunto una classificazione delle trasformazioni di 3^a specie (cioè di quelle trasformazioni fra piani per cui in un punto generico le tre direzioni caratteristiche coincidono), fondata su tale concetto.

Le trasformazioni di 3^a specie verranno distinte in tre tipi secondo che:

1°) la corrispondenza linearizzante generica, in una coppia generica di punti corrispondenti, è di indici (1, 2);

2°) la corrispondenza linearizzante generica, in una coppia generica di punti corrispondenti, si riduce ad una proiettività;

3°) la corrispondenza linearizzante generica, in una coppia generica di punti corrispondenti, è degenere.

Per le trasformazioni del 3° tipo esiste, in una coppia generica (A, B), una trasformazione quadratica che approssima la trasformazione data fino all'intorno del 3° ordine (trasformazione quadratica iperosculatrice). Considerando la corrispondenza linearizzante relativa alla trasformazione data e a questa trasformazione quadratica iperosculatrice, questo caso dà luogo a tre sottocasi. Infatti tale corrispondenza linearizzante è degenere: ad una retta generica per A (per B) corrisponde una retta $\bar{t}$ (t).

(1) Si veda: M. VILLA, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali*, Compositio Mathematica, Vol. 12, p. 137 (1954); M. VILLA, *Progressi recenti nella teoria delle trasformazioni puntuali*, Conferenze del Seminario Matematico dell'Università di Bari, N. 10 (1955). Una comunicazione sull'argomento della presente Nota venne da me fatta al V° Congresso della U. M. I. (Pavia-Torino, 1955).

Si possono dunque presentare i tre sottocasi:

1°) t è diversa dalla retta caratteristica;

2°) t coincide con la retta caratteristica;

3°) t è indeterminata.

Le trasformazioni del 2° sottotipo sono quelle per cui le curve caratteristiche sono rette di un fascio (in entrambi i piani), fra i due fasci essendo subordinata una proiettività. Le trasformazioni del terzo sottotipo sono le trasformazioni quadratiche di 3ª specie.

Va rilevato che i casi e i sottocasi qui ottenuti, basati sul criterio di classificazione geometrico anzidetto, coincidono con i casi e sottocasi ottenuti dal MURACCHINI per altra via ([2]).

2. - Una trasformazione puntuale T fra due piani π, $\bar{\pi}$ è determinata se si conoscono le espressioni delle coordinate omogenee del punto A di π e quelle delle coordinate omogenee del punto corrispondente B di $\bar{\pi}$ date da funzioni (che supponiamo analitiche) di due parametri (principali) u_1, u_2.
Per tutti i valori considerati di u_1, u_2, si supporrà

$$\left| A \frac{\partial A}{\partial u_1} \frac{\partial A}{\partial u_2} \right| \neq 0, \qquad \left| B \frac{\partial B}{\partial u_1} \frac{\partial B}{\partial u_2} \right| \neq 0.$$

Nel piano π si assumano come punti fondamentali del riferimento mobile il punto A e due punti arbitrari A_1, A_2. Nel piano $\bar{\pi}$ si assumano come punti fondamentali del riferimento mobile il punto B e i corrispondenti B_1, B_2 di A_1, A_2 in una prefissata omografia tangente K. Si hanno le equazioni fondamentali

$$(1) \qquad \begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2 \\ dA_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 \\ dA_2 &= \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 \\ dB &= \bar{\omega}_{00}B + \bar{\omega}_{01}B_1 + \bar{\omega}_{02}B_2 \\ dB_1 &= \bar{\omega}_{10}B + \bar{\omega}_{11}B_1 + \bar{\omega}_{12}B_2 \\ dB_2 &= \bar{\omega}_{20}B + \bar{\omega}_{21}B_1 + \bar{\omega}_{22}B_2 , \end{aligned}$$

le ω_{ik}, $\bar{\omega}_{ik}$ $(i, k = 0, 1, 2)$ essendo forme di PFAFF nei due parametri principali e nei dieci parametri secondari (le 3 coordinate di A_1, le 3 di A_2, i due parametri da cui dipende K, i fattori di proporzionalità delle coordinate dei punti di π e di $\bar{\pi}$).

([2]) L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali di seconda e terza specie fra piani proiettivi,* Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, Ser. III, Vol. I, p. 25 (1953).

Le equazioni di struttura del gruppo proiettivo sono

$$
\begin{aligned}
&[d\omega_{ik}] = [\omega_{i0}\omega_{0k}] + [\omega_{i1}\omega_{1k}] + [\omega_{i2}\omega_{2k}], \\
&[d\bar{\omega}_{ik}] = [\bar{\omega}_{i0}\bar{\omega}_{0k}] = [\bar{\omega}_{i1}\bar{\omega}_{1k}] + [\bar{\omega}_{i2}\bar{\omega}_{2k}].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Fra le 18 forme di Pfaff ω_{ik}, $\bar{\omega}_{ik}$ devono esistere 6 relazioni lineari.

Essendo B, B_1, B_2 i corrispondenti in una omografia tangente K di A, A_1, A_2 si ha

$$
\omega_{01} = \bar{\omega}_{01} \quad , \quad \omega_{02} = \bar{\omega}_{02} \, . \tag{3}
$$

Si ponga

$$
\omega_{01} = \omega_1 \quad , \quad \omega_{02} = \omega_2
$$

e si osservi che ω_1, ω_2 sono due forme (lineari) indipendenti nei differenziali dei due parametri principali. Si ponga inoltre

$$
\tau_{ik} = \bar{\omega}_{ik} - \omega_{ik} \, .
$$

Per determinare le quattro relazioni lineari rimanenti fra le ω_{ik}, $\bar{\omega}_{ik}$, differenziamo esternamente le (3). Tenendo presenti le (2) si ottiene

$$
\begin{aligned}
&[\omega_1 \;\, \tau_{11} - \tau_{00}] + [\omega_2 \;\, \tau_{21}] = 0 \\
&[\omega_1 \;\, \tau_{12}] + [\omega_2 \;\, \tau_{22} - \tau_{00}] = 0 \, .
\end{aligned}
$$

Segue che esistono due forme quadratiche in ω_1, ω_2

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= C_{11}{}^1 \omega_1{}^2 + 2C_{12}{}^1 \omega_1\omega_2 + C_{22}{}^1 \omega_2{}^2 \\
\Omega_2 &= C_{11}{}^2 \omega_1{}^2 + 2C_{12}{}^2 \omega_1\omega_2 + C_{22}{}^2 \omega_2{}^2 ,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

tali che

$$
\begin{aligned}
\tau_{11} - \tau_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_1} \\
\tau_{21} \qquad &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_2} \\
\tau_{12} \qquad &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_1} \\
\tau_{22} - \tau_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_2} \, .
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Le (5) sono le quattro ulteriori relazioni lineari fra le nostre forme di Pfaff.

Le ω_1, ω_2 si possono considerare come coordinate proiettive omogenee della retta del fascio A, individuata dai punti A,

$\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2$, ossia da A, dA. E così le ω_1, ω_2 si possono considerare come coordinate proiettive omogenee della retta del fascio B, individuata dai punti B, $\omega_1 B_1 + \omega_2 B_2$, ossia da B, dB (3).

Considerando fra i fasci A, B la corrispondenza che alla retta (ω_1, ω_2) fa corrispondere la retta (Ω_1, Ω_2), dove i valori di Ω_1, Ω_2 sono dati dalle (4), si ha la corrispondenza linearizzante relativa a T e all'omografia tangente K (4).

3. - L'equazione delle direzioni caratteristiche è

$$\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1 = 0.$$

Tenendo presente che queste tre rette debbono coincidere, assumendo A_2 sulla retta caratteristica e come omografia tangente K una delle omografie caratteristiche (5), segue

$$C_{22}{}^1 = 0, \quad 2C_{12}{}^2 - C_{11}{}^1 = 0, \quad C_{22}{}^2 = 0, \quad C_{12}{}^1 = 0, \quad C_{11}{}^2 \neq 0. \tag{6}$$

Indicando con δ un simbolo di differenziazione rispetto al quale i parametri u_1, u_2 sono considerati costanti, posto $\omega_{ik}(\delta) = e_{ik}$, dalla 3ª della (5) si ottiene

$$\delta C_{11}{}^2 = C_{11}{}^2 (e_{22} - e_{00}).$$

Essendo $C_{11}{}^2 \neq 0$, con scelta opportuna dei riferimenti può rendersi

$$C_{11}{}^2 = -1. \tag{7}$$

Dalla prima delle (5), per la (7), si ha

$$\delta C_{11}{}^1 = C_{11}{}^1 (e_{11} - e_{00}) + 2t_{10}.$$

Con scelta conveniente dei riferimenti si può quindi rendere

$$C_{11}{}^1 = 0. \tag{8}$$

(3) Chiamando corrispondenti due rette dei fasci A, B relative agli stessi valori di ω_1, ω_2 si ha la proiettività $\mathfrak{T}$ subordinata dalla data trasformazione puntuale nell'intorno del 1° ordine di (A, B).

(4) Per la nozione di corrispondenza linearizzante di due trasformazioni puntuali, si veda: VILLA, op. cit.

(5) Per omografie caratteristiche s'intendono quelle omografie tangenti che subordinano fra le direzioni caratteristiche le proiettività caratteristiche. Per quest'ultima nozione, si veda: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, Nota I, Rend. dell'Accademia dei Lincei, Ser. VIII Vol. IV, p. 57 (1948).

Per le (6), (7), (8), le (5) divengono

$$(9)\qquad \begin{aligned} \tau_{11} - \tau_{00} &= \ \ 0 \\ \tau_{21} \qquad &= \ \ 0 \\ \tau_{12} \qquad &= -\omega_1 \\ \tau_{22} - \tau_{00} &= \ \ 0. \end{aligned}$$

Differenziando esternamente le (9), si ottiene.

$$\begin{aligned} &[2\tau_{10} + \omega_{12}\ \omega_1] + [\tau_{20}\ \omega_2] = 0 \\ &[\tau_{20}\ \omega_1] = 0 \\ &[\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22}\ \omega_1] + [\tau_{10} - \omega_{12}\ \omega_2] = 0 \\ &[\tau_{10} - \omega_{12}\ \omega_1] + 2[\tau_{20}\ \omega_2] = 0. \end{aligned}$$

Esistono quindi due forme cubiche

$$(10)\qquad \begin{aligned} \Theta_1 &= \alpha_{30}\omega_1^3 + 3\alpha_{21}\omega_1^2\omega_2 \\ \Theta_2 &= \beta_{30}\omega_1^3 + 3\beta_{21}\omega_1^2\omega_2 + 6\alpha_{21}\omega_1\omega_2^2, \end{aligned}$$

tali che si ha

$$(11)\qquad \begin{aligned} 2\tau_{10} + \omega_{21} \qquad &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_1^2} \\ \tau_{20} \qquad &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_1\partial\omega_2} \\ \omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22} &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_1^2} \\ \tau_{10} - \omega_{21} \qquad &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_1\partial\omega_2} \\ \frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_1\partial\omega_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_2^2}, &\quad \frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_2^2} = 0. \end{aligned}$$

Anche qui, analogamente a quanto avviene per le trasformazioni di 1ª specie ([6]), si hanno dunque le forme cubiche Θ_1, Θ_2 di notevole interesse nella teoria.

4. - Gli sviluppi locali, fino ai termini di 3° grado, della trasformazione T sono

$$(12)\qquad \begin{aligned} \bar{x} &= x \qquad\qquad - \frac{1}{6}(\alpha_{30}x^3 + 3\alpha_{21}x^2y) + [4] \\ \bar{y} &= y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}(\beta_{30}x^3 + 3\beta_{21}x^2y + 6\alpha_{12}xy^2) + [4]. \end{aligned}$$

([6]) Si veda: VILLA, op. cit.

D'altra parte le trasformazioni quadratiche osculatrici (t.q.o.) a T in (A, B), nell'intorno del 3° ordine della coppia (A, B), sono rappresentate dalle equazioni

$$(13)\qquad \begin{aligned} \bar{x} &= x \qquad\qquad - \frac{\lambda}{2} x^3 + [4] \\ \bar{y} &= y - \frac{1}{2} x^2 + \frac{\mu}{4} x^3 + [4]\,. \end{aligned}$$

Al variare di parametri λ, μ si hanno le ∞^2 t.q.o. La corrispondenza linearizzante relativa a T e alla t.q.o. (13) ha le equazioni

$$(14)\qquad \begin{aligned} p' &= (\alpha_{30} - 3\lambda) p^3 + 3\alpha_{21} p^2 q \\ q' &= \left(\beta_{30} + \frac{3}{2}\mu\right) p^3 + 3\beta_{21} p^2 q + 6\alpha_{21} p q^2, \end{aligned}$$

essendo p, q (p', q') coordinate proiettive omogenee nel fascio di centro A. Si osservi che la corrispondenza linearizzante (14) si riduce a una corrispondenza di indici (1, 2) in quanto delle tre rette corrispondenti ad una retta (p', q') una è sempre la retta caratteristica $p = 0$.

OSSERVAZIONE: se nel fascio A alla retta (ω_1, ω_2) si fa corrispondere la retta (Θ_1, Θ_2), Θ_1, Θ_2 essendo dati dalle (10), si ottiene la corrispondenza linearizzante relativa alla T e alla t.q.o. data dai valori $\lambda = \mu = 0$.

5. - Distinguiamo le trasformazioni T in tre tipi a seconda che, in una coppia generica di punti corrispondenti, la corrispondenza linearizzante relativa a T e alla t.q.o. generica è esattamente di indici (1, 2), oppure si riduce ad una proiettività, oppure è degenere.

Affinchè la corrispondenza (14) sia proprio di indici (1, 2) dev'essere $\neq 0$ il risultante dei due polinomi

$$\begin{aligned} &(\alpha_{30} - 3\lambda) p^2 + 3\alpha_{21} p q\,, \\ &\left(\beta_{30} + \frac{3}{2}\mu\right) p^2 + 3\beta_{21} p q + 6\alpha_{21} q^2, \end{aligned}$$

che si ottengono dai secondi membri delle (14) dividendo per p. Deve cioè essere, per valori generici di λ, μ:

$$\begin{aligned} 6\alpha_{21}(6\alpha_{21}\alpha_{30}^2 - 36\alpha_{21}\alpha_{30}\lambda + 54\alpha_{21}\alpha_{30}\lambda^2 + 9\alpha_{21}^2\beta_{30} + \frac{27}{2}\alpha_{21}^2\mu - \\ - 9\alpha_{21}\beta_{21}\alpha_{30} + 27\alpha_{21}\beta_{21}\lambda) \neq 0, \end{aligned}$$

il che implica

$$\alpha_{21} \neq 0.$$

Questa è dunque la condizione perchè la trasformazione sia del 1° tipo (caso generale). La trasformazione è del 2° tipo quando (per λ, μ generici) la (14) riducesi ad una proiettività, il che implica

$$\alpha_{21} = 0 \;, \quad \beta_{21} \neq 0.$$

Affinchè tale proiettività sia poi degenere (3° tipo), per valori generici di λ, μ, deve aversi

$$\beta_{21} = 0.$$

Si osservi che α_{21} è un invariante relativo poichè dalla seconda delle (11) si ha

$$\delta\alpha_{21} = -3\alpha_{21}\, e_{00}\,.$$

6. - Per le trasformazioni del 1° tipo, è (n. 5) $\alpha_{21} \neq 0$; sicchè si potrà porre $\alpha_{21} = -1$. Dalle (9) si ha

$$\begin{aligned} \delta\alpha_{30} &= -2\alpha_{30}e_{00} + 3e_{20} - 3\alpha_{21}e_{12} \\ \delta\beta_{30} &= -\beta_{30}e_{00} + (3\beta_{21} - \alpha_{30})e_{12} - 3e_{10} \\ \delta\beta_{21} &= -2\beta_{21}e_{00} + 3\alpha_{21}e_{12}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Essendo $\alpha_{21} = -1$, da queste segue che si può porre

$$\beta_{21} = \alpha_{30} = \beta_{30} = 0.$$

Gli sviluppi (12) divengono quindi

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \qquad + \frac{1}{2}\, x^2 y + [4] \\ \bar{y} &= y - \frac{1}{2}\, x^3 + xy^2 + [4] \end{aligned}$$

che coincidono con quelli ottenuti nel primo caso dal MURACCHINI [7].

7. - Consideriamo ora le trasformazioni del 2° tipo. È qui $\alpha_{21} = 0$, $\beta_{21} \neq 0$.

Dall'ultima delle (15) risulta (essendo $\alpha_{21} = 0$) che β_{21} è un invariante relativo. Dalla 1ª e dalla 2ª delle (15) segue che ad α_{30},

[7] In questo caso gl'invarianti fondamentali sono sei, le trasformazioni dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile e le curve caratteristiche non sono mai rette. Si veda: MURACCHINI, op. cit, p. 40.

β_{30} si possono dare valori arbitrari. Possiamo quindi porre

$$\beta_{21} = -3, \quad \alpha_{30} = 3, \quad \beta_{30} = 0.$$

Allora gli sviluppi locali (12) divengono

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \qquad\qquad - \frac{1}{2}x^3 + [4] \\ \bar{y} &= y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^2y + [4] \end{aligned}$$

e questi coincidono, com'è facile verificare, con quelli ottenuti dal MURACCHINI nel 2° caso da lui considerato ($g = 0$, $k \neq 0$) [8].

8. - Consideriamo infine le trasformazioni del 3° tipo : $\alpha_{21} = 0$, $\beta_{21} = 0$.

Dalle (15) segue che ad α_{30} e β_{30} si possono dare valori arbitrari, e noi porremo

$$\alpha_{30} = \beta_{30} = 0.$$

Dalle (11) differenziando esternamente si ottiene

$$\begin{aligned} \omega_{20} &= H\omega_1 . \\ \omega_{10} &= K\omega_1 . \end{aligned}$$

Gli sviluppi locali della trasformazione fino all'intorno del 4° ordine sono

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \qquad\qquad + \frac{H}{8}x^4 + [5] \\ \bar{y} &= y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{K}{8}x^4 + [5]. \end{aligned} \tag{16}$$

Segue che la t.q.o.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= y - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

(relativa ai valori $\lambda = 0$, $\mu = 0$) è addirittura iperosculatrice. Si può quindi considerare la corrispondenza linearizzante Γ relativa alla trasformazione data e a questa t.q.o.; essa ha le equazioni

$$\begin{aligned} p' &= Hp^4 \\ q' &= -Kp^4. \end{aligned}$$

[8] Si veda: MURACCHINI, op. cit., p. 41. Le curve caratteristiche sono qui rette. Le trasformazioni dipendono da tre funzioni arbitrarie di una variabile e si hanno tre invarianti fondamentali.

Γ è quindi degenere e si possono distinguere tre sottotipi secondo il comportamento della retta singolare $\frac{p'}{q'} = -\frac{H}{K}$:

1) la retta singolare è distinta dalla retta caratteristica tripla ($H \neq 0$);

2) la retta singolare coincide con la retta caratteristica tripla ($H = 0$; $K \neq 0$);

3) la retta singolare è indeterminata ($H = K = 0$).

Nel 1° sottotipo si può porre $H = -1$, $K = 0$. Gli sviluppi locali (10) divengono

$$\bar{x} = x - \frac{1}{8} x^4 + [5]$$

$$\bar{y} = y - \frac{1}{2} x^2 + [5]$$

che coincidono, come facilmente si verifica, con quelli ottenuti dal MURACCHINI nel caso $g = 0$, $k = 0$, $h \neq 0$ [9].

Nel 2° sottotipo si ha $H = 0$, $K \neq 0$; si può porre $K = 1$. Gli sviluppi locali (10) divengono

$$\bar{x} = x$$

$$\bar{y} = y - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + [5]$$

che coincidono, come facilmente si verifica, con quelli ottenuti dal MURACCHINI nel caso $g = 0$, $k = 0$, $h = 0$, $m \neq 0$ [10].

Nel 3° sottotipo si ha $H = K = 0$. In questo caso la trasformazione si riduce alla trasformazione quadratica di 3ª specie

$$\bar{x} = x$$

$$\bar{y} = y - \frac{1}{2} x^2 \ [11].$$

(9) Si veda: MURACCHINI, op. cit., p. 41. Anche qui le curve caratteristiche sono rette. Le trasformazioni posseggono due invarianti fondamentali e dipendono da due funzioni arbitrarie di una variabile.

(10) Si veda: MURACCHINI, op. cit., p. 43. Le curve caratteristiche sono qui rette di un fascio in entrambi i piani, e fra i due fasci è subordinata una proiettività. Le trasformazioni dipendono da una funzione arbitraria di una variabile.

(11) Si verifica che questo è il caso $g = k = h = m = 0$ considerato dal MURACCHINI (op. cit., p. 44).