Bollettino
Unione Matematica Italiana

Salvatore Cherubino

Su una disuguaglianza in matrici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 126–132.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_126_0>

Su una disuguaglianza in matrici.

Nota di SALVATORE CHERUBINO (a Pisa)

Sunto. - *Si dà una condizione necessaria e sufficiente, o almeno sufficiente, per la compatibilità della disuguaglianza* $\mathrm{x}A > 0$, *oppure* $\mathrm{x}A \geqq 0$, *con* $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$, A *matrice reale costante oppure variabile, ad elementi funzioni limitate. Se ne fa applicazione al caso in cui* A *sia la matrice esponenziale* e^{At} *con* A *costante, oppure la matrizzante di* A, *se* A *è variabile, con gli elementi di* A *funzioni di* t *integrabili in un intervallo.*

In certi problemi di fisica matematica, elettrotecnica, dinamica analitica, econometrica, etc. (1) fra le condizioni di stabilità o fra quelle di esistenza, può incontrarsi una disuguaglianza come la seguente.

$$\mathrm{x}A > 0, \tag{1}$$

nella quate $A = [a_{rs}]$ è una matrice reale conosciuta, ad n righe e p colonne, $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vettore incognito ad n componenti tutte reali positive ($\mathrm{x} > 0$). Gli elementi a_{rs} di A possono essere costanti oppure funzioni limitate di una o più variabili reali appartenenti ad un insieme $\mathfrak{J}$. Si desiderano le condizioni necessarie e sufficienti, o almeno soltanto sufficienti, perchè la (1) sia risolubile con $\mathrm{x} > 0$ (2) ed un metodo per costruire tutte le possibili soluzioni. Per farci intendere meglio spieghiamo che la (1) sintetizza il sistema di p disuguaglianze:

$$x_1 a_{1s} + x_2 a_{2s} + \ldots + x_n a_{ns} > 0; \quad s = 1, 2, \ldots p. \tag{1'}$$

La (1) è stata da noi incontrata in quistioni econometriche (3) traducibili in un sistema differenziale lineare omogeneo (alle derivate ordinarie) che in forma compatta si scrive:

$$\frac{d\mathrm{y}}{dt} = \mathrm{y}A \tag{α}$$

con y vettore orizzontale incognito ad n componenti funzioni del tempo t ed A matrice quadrata reale di ordine n anch'essa funzione di t. L'integrale generale di (α) si scrive:

$$\mathrm{y} = \mathrm{c} \cdot \mathfrak{M} \tag{β}$$

(1) Ad es., quando si tratti di mantenere un sistema dinamico in prossimità di un certo stato di equilibrio o di minimo costo, tenuto conto del costo del controllo. Cfr.: R. BELLMANN, F. GLICKSBERG, O. GROSS: *On some variational problems*.... (Rend. Pal., s. II, t. III (1954) pp. 363-397).

(2) Diremo allora che la (1) è *compatibile* con $\mathrm{x} > 0$.

(3) *Sui fondamenti matematici della teoria dell'equilibrio generale economico* [« L'Industria », Milano (1956)] n. 16, § 8.

con $y(0) = c > 0$ vettore ad n componenti costanti arbitrarie, $\mathfrak{M}$ matrizzante destra di A, che per A costante diventa l'esponenziale e^{At}. Qui si trovano appunto condizioni sufficienti perchè la (1) valga, con $x > 0$, per $A = \mathfrak{M}$.

Condizioni analoghe si hanno per la disuguagliaza $xA \geqq 0$.

§ 1. Caso di A costante.

1. Osserviamo in primo luogo che se qualche colonna di A in un punto di $\mathfrak{J}$ risulta ad elementi tutti $\leqq 0$, la corrispondente disuguaglianza (1') è incomparabile con $x > 0$; se qualche riga di A risulta ad elementi > 0 in tutto $\mathfrak{J}$ la (1) è certo risolubile bastando prendere il corrispondente coefficiente x_r sufficientemente grande rispetto ai rimanenti fissati a piacere (sempre > 0); se infine qualche riga di A è $\leqq 0$ (cioè sono tali i suoi elementi) la (1) è ancora compatile con $x > 0$ se e sole se vi è qualche combinazione lineare delle rimanenti righe, fatta con coefficienti positivi, che risulta > 0.

Basta perciò limitarsi a supporre che A sia priva di righe o colonne che in uno o più punti di $\mathfrak{J}$ sono $\leqq 0$ ed anche priva di righe che si mantengono > 0 in tutto $\mathfrak{J}$.

In questo primo § supporremo A costante; nel secondo A sarà variabile.

Consideriamo due righe di A, ad es. le prime due, e diciamo

$$a_1, a_2, \ldots, a_q \tag{2}$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_q \tag{3}$$

gli elementi corrispondenti di esse che hanno segni contrari, cioè > 0 nell'una e $\leqq 0$ nell'altra [4], mentre i rimanenti $p - q$ elementi di egual posto sono dello stesso segno. Degli elementi (2) ve ne siano l, ad es. $a_1, a_2, \ldots, a_l$, $l \leqq q$, tutti > 0, mentre i rimanenti $q - l$ sono tutti $\leqq 0$: diremo m_a il minimo di quelli positivi ed M_a il massimo valore assoluto degli elementi (2) che sono $\leqq 0$.

Dei (3) sono $\leqq 0$ i primi l, col massimo valore assoluto M_b; i rimanenti, col minimo m_b, sono > 0. Ci domandiamo per quali valori, entrambi positivi, di x_1 ed x_2, si avrà, *se e quando possibile*:

$$x_1 a_s + x_2 b_s > 0; \qquad (s = 1, 2, \ldots, q). \tag{4}$$

Si vede subito che occorre e basta prendere

$$\frac{M_b}{m_a} < \frac{x_1}{x_2} < \frac{m_b}{M_a}, \tag{5}$$

[4] Un elemento zero vien sempre considerato di segno negativo. Per la disuguaglianza $xA \geqq 0$ verrà invece considerato positivo.

quindi che la condizione necessaria e sufficiente perchè valgono tutte le (4) è che:

$$\frac{M_b}{m_a} < \frac{m_b}{M_a}. \tag{I}$$

Ogni combinazione lineare delle due righe considerate di A, a coefficienti positivi x_1, x_2 soddisfacenti alla limitazione (5), dà una riga avente q elementi positivi ai primi q posti, mentre i rimanenti $p - q$ avranno segno comune con gli elementi corrispondenti della linee stesse ([5]). Queste combinazioni lineari (che sono in numero doppiamente infinito) hanno dunque ciascuna almeno q elementi positivi.

Dopo di ciò, se una delle due righe, che possiamo sempre pensare al primo posto, è quella riga di A che possiede il massimo numero di elementi positivi, mentre l'altra è una riga qualunque ma fissata di A, diversa dalla prima, ognuna delle combinazioni predette avrà sempre lo stesso numero di elementi positivi, che sarà non minore del massimo numero di elementi positivi possedute da una qualsiasi riga di A.

Sopprimiamo in A le due righe sinora considerate e sostituiamo ad esse una a piacere delle combinazioni lineari secondo x_1, x_2 soddisfacenti alla (5) mettendola al primo posto. Avremo una matrice A' ad $n - 1$ righe e p colonne la cui prima riga ha il massimo numero di elementi positivi, rispetto a ogni altra.

Se, accoppiando a questa prima riga di A', un'altra qualunque di A' stessa ossia di A, vale ancora una relazione come la (I), a queste due righe si sostituirà al primo posto una combinazione lineare ottenuta al modo precedente e avente un numero di elementi positivi maggiore, o almeno non minore, del massimo presentato dalle righe di A' e a maggior ragione da quelle di A. Così di seguito.

Il procedimento descritto avrà termine con esito favorevole quando si pervenga ad una matrice di una sola riga ed elementi tutti positivi, ovvero ad una matrice di più righe ad elementi tutti > 0. Se invece si pervenisse ad una matrice avente qualche colonna ad elementi tutti $\leqq 0$, ovvero si incontrasse una limitazione come (I) non soddisfatta, il procedimento avrà fine con esito sfavorevole.

Si tenga conto che quando due righe sono ad elementi tutti positivi si ha $m_a > 0$, $m_b > 0$, $M_a = M_b = 0$, quindi la (I) può dirsi ancora soddisfatta perchè il secondo membro vale $+\infty$.

([5]) Abbiamo supposto che gli elementi (2) - (3) occupino i primi q posti nelle due righe, ciò che può sempre farsi con opportuno ordinamento delle colonne di A. Così appresso.

Perciò, se il procedimento descritto ha avuto esito favorevole può dirsi che sono soddisfatte n condizioni come la (I).

Gli elementi $\leqq 0$ della combinazione lineare sostituita a ciascuna delle coppie di righe via via considerate compaiono soltanto nei posti occupati da elementi $\leqq 0$ in entrambe le righe di ogni coppia. Poichè ciascuna di queste ha una riga in comune con la coppia successiva, non può pervenirsi ad una matrice avente una colonna ad elementi tutti $\leqq 0$ se ciò non si verificava già in A, il che si è escluso. Per la stessa ragione non può accadere che la riga $A^{(n-1)}$, se ad essa si è pervenuto, abbia elementi $\leqq 0$. Dunque le n condizioni (I) ottenute col nostro processo sono non solo necessarie ma anche sufficienti per la compatibilità della (1) con $\mathrm{x} > 0$.

Supponiamo ora che la (1) sia verificata per un certo vettore $\mathrm{x} > 0$ e consideriamo una riga qualunque di A, ad es. la r^{ma}. Questa, insieme a quella ottenuta combinando le rimanenti righe di A coi coefficienti $x_s > 0$, $s \neq r$, componenti di x, dà una coppia di righe soddisfacente necessariamente alla (I), per $x_1 = x_r$, $x_2 = 1$. Si hanno dunque n disuguaglianze generalmente indipendenti [6] tutte come la (I). Si è così stabilita la condizione necessaria e sufficiente per la compatibitità della (1) con $\mathrm{x} > 0$, insieme a un procedimento per costruire x.

3. Il numero delle combinazioni lineari che possono sostituirsi ad ognuna delle coppie considerate nel processo descritto ai nn. 1 e 2, salvo un fattore positivo arbitrario di proporzionalità, è semplicemente infinito. Se la (1) è compatibile con $\mathrm{x} > 0$, si hanno dunque ∞^n soluzioni massima infinità compatibile col numero delle componenti indeterminate di x.

Rileviamo infine che l'insieme delle ∞^n soluzioni ottenute è convesso, cioè considerando le componenti di x come coordinate eterogenee di punto, ad esso appartengono tutti i punti del segmento che congiunge due punti x', x'' qualunque dell'insieme.

§ 2. Caso di A variabile.

4. Gli elementi di A siano funzioni limitate, nell'insieme $\mathfrak{J}$ cui appartengono le variabili indipendenti e sia m_{rs} il limite inferiore od il minimo di a_{rs}, ($r = 1, 2, \dots, n$; $s = 1, 2, \dots, p$) cioè sia sempre $a_{rs} \geqq m_{rs}$ il che, ponendo $M = [m_{rs}]$, esprimiamo scrivendo $A - M \geqq 0$. Quindi per ogni $\mathrm{x} > 0$ è $\mathrm{x}[A - M] \geqq 0$; dunque $\mathrm{x}M > 0$ è sufficiente perchè sia $\mathrm{x}A > 0$. La condizione $\mathrm{x}M > 0$ è anche necessaria quando gli elementi della matrice $M - A$ possono

[6] Perchè di volta in volta si opera su una nuova riga. Diciamo "generalmente" cioè salvo particolari determinazioni di A (ad es., A con righe ripetute).

assumere in $\mathfrak{I}$ determinazioni di modulo zero o comunque piccolo, poichè allora da $\mathrm{x}A > 0$ segue, per dette determinazioni, $\mathrm{x}[A + M - A] = \mathrm{x}M > 0$.

Sia M_r il massimo valore assoluto degli elementi $\leqq 0$ della riga r^{ma} di M; sia m_r il minimo degli elementi positivi della riga stessa. Si avrà, per qualunque s:

$$\frac{M_s}{m_r} \leqq \frac{\max M_r}{\min m_r}$$

$$\frac{m_s}{M_r} \geqq \frac{\min m_r}{\max M_r}$$

nelle quali $\max M_r$ e $\min m_r$ sono rispettivamente il massimo modulo degli elementi $\leqq 0$ di A ed il minimo di quelli > 0: continueremo, per comodità di esposizione, ad indicarli $\max M_r$ e $\min m_r$.

Se dunque si ha:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\max M_r}{\min m_r} < 1$$

segue che, per $r, s = 1, 2, \ldots, n$, risulta:

$$\frac{M_s}{m_r} < \frac{m_s}{M_r}$$

quindi per le righe r^{ma} ed s^{ma} di M vale la (I).

Basta tener conto che gli elementi (2) — (3) appartengono appunto, p. es., alle righe r^{ma}, ed s^{ma}, ma non è detto che le esauriscono. Perciò: $m_a \geqq m_r$, $m_b \geqq m_s$; $M_a \leqq M_r$, $M_b \leqq M_s$. Quindi, se vale la (II) vale anche la (I), ma non viceversa,

Per la riga ottenuta dalle prime due di A combinando coi coefficienti $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ diciamo M ed m rispettivamente il massimo valore assoluto degli elementi $\leqq 0$ ed il minimo degli elementi > 0; mentre M' ed m' sono gli analoghi massimo e minimo per una qualsiasi fissata riga di M diversa dalle prime due. Si ha senz'altro:

$$\frac{M'}{m} \leqq \frac{M'}{x_1 m_1 + x_2 m_2} \leqq \frac{\max M_r}{(x_1 + x_2) \min m_r},$$

$$\frac{m'}{M} \geqq \frac{m'}{x_1 M_1 + x_2 M_2} \geqq \frac{\min m_r}{(x_1 + x_2) \max M_r}.$$

quindi, per la (II), risulta:

$$\frac{M'}{m} < \frac{m'}{M}$$

cioè vale sempre l'analoga della (I).

Ne concludiamo che la (I) è sufficiente perchè la disuguaglianza (1) sia compatibile con $\mathrm{x} > 0$, sia quando la matrice A è variabile che quando A è costante.

5. Aggiungiamo ad A una matrice $B = [\mu_{rs}]$ ad elementi appartenenti tutti all'intervallo $(0, \mu)$ con

$$\text{(III)} \qquad 0 < \mu \leqq \max M_r .$$

Il massimo modulo degli elementi negativi di $A + B$ non supera quello $\max M_r$ di A (è al minimo $\max\, M_r - \mu$) il minimo degli elementi > 0 di $A + B$ non è minore di quello m_r di A (è al massimo $m_r + \mu$). La (III), insieme alla (II), assicura la compatibilità della (1) con $\mathrm{x} > 0$ quando ad A si aggiunge B.

Questa compatibilità sussiste anche se gli elementi di B variano, anzichè in $(0, \mu)$, in $(-\mu, \mu)$ quando insieme alla (II) si abbia:

$$\frac{\max M_r + \mu}{\min m_r - \mu} < 1$$

ossia:

$$\text{(IV)} \qquad 2\mu < \min m_r - \max M_r .$$

Invero, in questo caso, il massimo modulo degli elementi $\leqq 0$ di $A + B$ non supera $\max M_r + \mu$ ed il minimo degli elementi > 0 non è inferiore a $\min m_r - \mu$.

6. Passiamo infine a mostrare come dalla ultima osservazione segue una condizione sufficiente perchè, con A quadrata di ordine n e $t > 0$, la matrice esponenziale

$$\text{(6)} \qquad e^{At} = I + \frac{At}{1} + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots$$

dia, per vettori opportuni $\mathrm{x} > 0$, $\mathrm{x}e^{At} > 0$.

Dalla convergenza della serie esponenziale segue che converge la serie dei massimi moduli degli elementi della serie ottenuta da (6) sopprimendo i primi due termini e dividendo tutti gli altri per t^2. Intanto, se A soddisfa alla (1) con $\mathrm{x} > 0$, vi soddisferà anche At insieme ad $I + At$, qualunque sia $t > 0$. Se ν è la somma della serie indicata poco fa, prendendo $\mu = \nu t^2$ si soddisferà alla *(IV)* diminuendo convenientemente t, quindi ν e $\nu t^2 = \mu$. Dopo di che quel che si voleva è raggiunto.

Se A è funzione integrabile di t nell'intervallo $(0, t_1)$, la matrizzante destra di A è la somma della serie assolutamente ed uniformemente convergente.

$$\text{(7)} \qquad \mathfrak{M} = I + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \ldots$$

nella quale si ha:

$$\text{(8)} \qquad \mathfrak{D}_1 = \int_0^{t_1} A d\tau ; \qquad \mathfrak{D}_{s+1} = \int_0^{t_1} \mathfrak{D}_s A d\tau ; \qquad s = 1, 2, \ldots .$$

Essendo gli elementi di A funzioni limitate di τ nell'intervallo $(0, t_1)$, si ha:

$$\text{(9)} \qquad \mathfrak{D}_{s+1} = t_1 B_{s+1} ; \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

con B_{s+1} matrice i cui elementi sono determinazioni opportune di quelli dell'integranda di $\mathfrak{D}_{s+1}$, comprese tra gli estremi inferiore e superiore degli elementi corrispondenti della matrice $\mathfrak{D}_s A$. Sulla serie matrizzante (7) si può perciò fare un ragionamento analogo a quello fatto per la serie esponenziale e^{At}. Si conclude che si può sempre prendere t_1 così piccolo che gli elementi della matrice $\mathfrak{M} - I - \mathfrak{D}_1$ capitino tutti in un intervallo $(-\mu, \mu)$ con μ soddisfacente alla (IV), nella quale $\min m_r$ e $\max M_r$ sono rispettivamente il minimo degli elementi > 0 ed il massimo valore assoluto degli elementi $\leqq 0$ di A.

7. Se s'indica con M il massimo valore assoluto degli elementi di A nell'intervallo $(0, t_1)$ le n^2 serie dei valori assoluti dei termini della serie (7) sono tutte minoranti di quella esponenziale e^{nMt_1}; quindi nella conclusione del n. prec. basta prendere $\mu = \nu t_1^2 = e^{nMt_1} - (1 + M)$. Analogamente per la serie (6).

Invece dei solo primi due termini, dalle serie (6) — (7) si possono separare i primi $j+2 > 2$ e procedere poi come prima. Diciamo $\mathfrak{M}_{j+1}$ la somma di $j+1$ termini della serie (7), o della (6), successivi al primo ed indichiamo con M_{j+1}, m_{j+1} il massimo valore assoluto dei suoi elementi $\leqq 0$ ed il minimo di quelli > 0. Si ha:

$$\frac{M_{j+1}}{m_{j+1}} \leqq \frac{M' + M''t_1 + \dots + M^j t_1^{j-1}}{m' + m''t_1 + \dots + m^j t_1^{j-1}} \tag{10}$$

dove M^l, m^l sono gli analoghi massimo e minimo per B_l o per A^l. Se il secondo membro di (10) è < 1, ci sono vettori $\mathrm{x} > 0$ pei quali si ha $\mathrm{x}\mathfrak{M}_{j+1} > 0$. Indicando allora con $\mu = \nu t_1^{j+1}$ la somma della serie ottenuta sopprimendo i primi $j+2$ termini nella serie esponenziale e^{nMt_1}, basterà avere $2\mu \leqq \sum_{r=1}^{j} (m^r - M^r) t_1^{r-1}$ perchè la (1) sia compatibile con $\mathrm{x} > 0$ per $A = \mathfrak{M}$ ed $A = e^{At}$. Questo limite superiore di μ può riuscire più alto di quello del n. prec., in cui $j = 1$, mentre ν è sempre più piccolo. Esso quindi può dare un intervallo $(0, t_1)$ di maggior ampiezza. Ciò accade senz'altro quando si ha $m^r > M^r$ per ogni valore di $r = 1, 2, \dots, j$, nel qual caso la (1) è compatibile con $\mathrm{x} > 0$ per tutte le matrici $B_1, \dots, B_j$ ovvero per le prime j potenze di A.

8. Se, invece della (1), si vuol risolvere la disuguaglianza $\mathrm{x}A \geqq 0$, sempre con $\mathrm{x} > 0$, si procederà allo stesso modo, salvo a considerare gli elementi zero di A come positivi. Si otterranno così le stesse condizioni (I) - (II) - (III) - (IV) nelle quali invece del segno $<$, si avrà quello $\leqq$. L'ultima parte del n. 7 viene però a mancare.

È poi del tutto ovvio come volendo $\mathrm{x} \geqq 0$, invece di $\mathrm{x} > 0$, ci si riduce al caso precedente sopprimendo in A le righe corrispondenti agli elementi zero di x.