BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIA NALLI

Calcolo tensoriale ed operazioni funzionali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.2, p. 117–122.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_2_117_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Calcolo tensoriale ed operazioni funzionali.

Nota I di Pia Nalli (a Catania)

Sunto. - *Nell' ordine di idee di una mia precedente Nota pubblicata su questo Bollettino, Giugno 1955, Serie III, Anno X, Num. 2 (pagg. 135-146) col titolo: Equazioni indipendenti dalla scelta delle variabili e caratterizzazione di varietà metriche, si porta un primo contributo alla analogia fra una particolare legge tensoriale ed una particolare operazione funzionale lineare.*

Da un tensore $T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}$ di rango $r+s$ in un dominio ad n dimensioni, con $r \geq 1$ indici di covarianza ed $s \geq 1$ di controvarianza, applicando l' operazione di saturazione degli indici, si possono ottenere altri tensori o invarianti, cioè sistemi che si trasformano linearmente quando si effettua un cambiamento di variabili. Dal che discende che l' annullarsi di tutti gli elementi del sistema (componenti del tensore) è indipendente dalla scelta delle variabili.

Ma dai suddetti tensori $T_{(i)}^{(j)}$ si possono ottenere altri sistemi, che non sono componenti di tensori, i quali si comportano nel modo suddetto (cioè trasformazione per linearità) relativamente ai cambiamenti di variabili.

Comincio col caso più semplice, partendo dal tensore doppio T_i^j.

Da esso può ottenersi l' invariante T_i^i. Ma possiamo formare un altro sistema di n^2-1 elementi, e precisamente le $n-1$ differenze $T_{i+1}^{i+1} - T_i^i$ per $i = 1, 2, \dots, n-1$ e le componenti T_i^j con $i \neq j$.

Esso si trasforma linearmente.

Infatti, passando da coordinate x_i a coordinate $\bar{x}_r$, risulta per qualunque coppia (r, s)

$$\bar{T}_r^s = T_i^i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_i} + T_i^j \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} \tag{1}$$

dove la prima somma è estesa ai valori di $i = 1, 2, \ldots, n$ e la seconda a tutte le coppie i, j con $i \neq j$.

La prima somma si può scrivere così:

$$-\sum_1^{n-1}{}_i \left(T_{i+1}^{i+1} - T_i^i\right) \sum_1^i{}_k \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_k} + \delta_r^s T_n^n$$

con

$$\delta_r^s = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s, \end{cases}$$

e la (1) diventa perciò:

$$(1') \quad \bar{T}_r^s = -\sum_1^{n-1}{}_i \left(T_{i+1}^{i+1} - T_i^i\right) \sum_1^i{}_k \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_k} + \delta_r^s T_n^n + T_i^j \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} \quad (i \neq j).$$

Per conseguenza: se $r \neq s$

$$(2) \qquad \bar{T}_r^s = -\sum_1^{n-1}{}_i \left(T_{i+1}^{i+1} - T_i^i\right) \sum_1^i{}_k \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_k} + T_i^j \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} \quad (i \neq j),$$

e, sempre per la (1'),

$$(3) \quad \bar{T}_{r+1}^{r+1} - \bar{T}_r^r = -\sum_1^{n-1}{}_i \left(T_{i+1}^{i+1} - T_i^i\right) \sum_1^i{}_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_{r+1}} \frac{\partial \bar{x}_{r+1}}{\partial x_k} - \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_k}\right) +$$

$$T_i^j \left(\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_{r+1}} \frac{\partial \bar{x}_{r+1}}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j}\right) \quad (i \neq j).$$

Le (2) e (3) dimostrano la linearità della trasformazione.

Se il sistema di $n^2 - 1$ elementi che è stato definito è nullo per particolari variabili, lo è qualunque siano le variabili, ed allora è $T_i^j = 0$ se $i \neq j$ ed essendo le T_i^i tutte eguali fra di loro, posto $T_i^i = \frac{1}{n} H$, sarà per la (1)

$$\bar{T}_r^r = \frac{1}{n} H \sum_1^n{}_i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_i},$$

e poichè la somma che qui figura è uguale ad 1,

$$\bar{T}_r^r = \frac{1}{n} H$$

ed H è l'invariante $\sum_1^n{}_i T_i^i$.

Per qualunque coppia i, j potremo quindi scrivere:

$$T_i^j = \frac{1}{n} H \delta_i^j.$$

Inversamente: se H è un invariante, posto $T_i^j = \frac{1}{n} H\delta_i^j$ si viene a definire un tensore per il quale sono nulli gli $n^2 - 1$ elementi corrispondenti.

Inversamente, sia un sistema di $n^2 - 1$ elementi, cioè $n - 1$ $P(i)$ $(i = 1, 2, \dots, n - 1)$ ed $n(n-1)$ elementi $Q(i, j)$, $(i \neq j)$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ che si trasforma secondo la legge (2), (3); cioè

$$(2')\qquad \overline{Q}(r, s) = -\sum_1^{n-1}{}_i P(i) \sum_1^i{}_k \frac{\partial x_k}{\partial \overline{x}_r} \frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_k} + Q(i, j) \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r} \frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_j} \quad (r \neq s,\ i \neq j),$$

$$(3')\qquad \overline{P}(r) = -\sum_1^{n-1}{}_i P(i) \sum_1^i{}_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial \overline{x}_{r+1}} \frac{\partial \overline{x}_{r+1}}{\partial x_k} - \frac{\partial x_k}{\partial \overline{x}_r} \frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_k} \right) +$$

$$Q(i, j) \left(\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_{r+1}} \frac{\partial \overline{x}_{r+1}}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r} \frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_j} \right) \quad (i \neq j).$$

Fissiamo ad arbitrio un valore C e poniamo

$$T_i^i = C + \sum_1^{i-1}{}_h P(h) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$T_i^j = Q(i, j) \quad (i \neq j)$$

ed analogamente:

$$\overline{T}_r^r = \overline{C} + \sum_1^{r-1}{}_h \overline{P}(h) \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

$$\overline{T}_r^s = \overline{Q}(r, s) \quad (r \neq s)$$

dove è

$$\overline{C} = T_i^j \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_1} \frac{\partial \overline{x}_1}{\partial x_j},$$

quest'ultima somma essendo estesa a tutte le coppie (i, j) (e non soltanto a quelle in cui è $i \neq j$); risulta che T_i^j è un tensore il cui trasformato è $\overline{T}_r^s$. In tal modo dal sistema $P(i)$, $Q(i, j)$ si ottengono infiniti tensori in dipendenza dalla arbitraria C.

Passiamo ora ad un altro ordine di idee.

Le (2′) e (3′) si possono considerare come operazione lineare che trasforma il sistema $P(i)$, $Q(i, j)$ nel sistema $\overline{P}(r)$, $\overline{Q}(r, s)$. Passando dal discreto al continuo si presenta immediata la trasformazione di una coppia di funzioni $P(i)$ e $Q(i, j)$, la prima definita in un intervallo (a, b) e la seconda nel quadrato $R \equiv (a, b)(a, b)$ ad eccezione dei punti della diagonale $i = j$, nella coppia di funzioni $\bar{P}(r)$ e $\bar{Q}(r, s)$ mediante le relazioni:

$$(4) \qquad \bar{P}(r) = -\int_a^b P(i)di \int_a^i \frac{\partial}{\partial r} F(k, r)dk + \int_R Q(i, j)\frac{\partial}{\partial r} G(i, j; r)didj,$$

$$(5) \qquad \bar{Q}(r, s) = -\int_a^b P(i)di \int_a^i M(k; r, s)dk + \int_R Q(i, j)V(i, j; r, s)didj$$

con opportune condizioni per le funzioni F, G, M, V in modo da conservare l'analogia con la trasformazione (3'), (2').

Una di queste condizioni è:

$$(6) \qquad \int_a^b M(k; r, s)dk = 0$$

in analogia con $\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_k} = 0$ se $r \neq s$.

Inoltre

$$(7) \qquad \int_a^b F(k, r)dk = 1, \quad \int_a^b F(k, r)dr = 1, \quad \int_a^b G(i, j; r)dr = 0$$

in analogia con

$$\Sigma_k \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_k} = 1, \quad \Sigma_r \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_k} = 1, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j} = 0 \text{ se } i \neq j.$$

La seconda e la terza delle (7) non sono condizioni per la F e la G dato che nella (4) figurano solo le derivate parziali rispetto ad r di tali funzioni, ma fissano solo la F e la G tra le infinite funzioni che ammettono le derivate parziali che si trovano nella (4).

Dalle (4) e (5), in base alle (6) e (7), se ne traggono due altre nel modo che passiamo ad esporre.

Denotiamo con $\psi(i)$ una funzione primitiva della $P(i)$:

$$\psi(i) = \int_a^i P(k)dk + C$$

con C costante arbitraria. Posto ora

$$\bar{\psi}(r) = \int_a^r \bar{P}(u)du + \bar{C}$$

dove è

$$\bar{C} = \int_a^b F(k, \ a)\psi(k)dk + \int_R G(i, \ j; \ a)Q(i, \ j)didj$$

si trova facilmente:

$$(8) \qquad \bar{\psi}(r) = \int_a^b F(k, \ r)\psi(k)dk + \int_R G(i, \ j; \ r)Q(i, \ j)didj;$$

$$(9) \qquad \bar{Q}(r, \ s) = \int_a^b M(k; \ r, \ s)\psi(k)dk + \int_R V(i, \ j; \ r, \ s)Q(i, \ j)didj.$$

Queste sono le corrispondenti della (1) e precisamente la (8) è la corrispondente della (1) per $r = s$ e la (9) per $r \neq s$, sono cioè le corrispondenti della legge di trasformazione di un tensore doppio con un indice di covarianza ed uno di controvarianza. Le abbiamo dedotte dalle (4) e (5) così come la (1) si può dedurre dalle (2′) e (3′). Ed intervengono in entrambi i procedimenti le costanti C e $\bar{C}$, la prima arbitraria e la seconda determinata quando si fissa la prima.

E come dalla (1) si ottengono le (2) e (3), dalle (8) e (9) si può arrivare alle (4) e (5) facendo intervenire invece delle $\psi(k)$ e $\bar{\psi}(r)$ le loro derivate $P(k)$ e $\bar{P}(r)$.

Ed analogamente al fatto che quando è $T_i^j = 0$ per $i \neq j$ e le T_i^i sono eguali fra di loro, lo stesso accade per il sistema trasformato $\bar{T}_r^s$ ed è inoltre $\bar{T}_r^r = T_i^i$ qualunque siano r ed i, se $Q(i, j)$ è nulla identicamente e $\psi(k)$ è costante $(\psi(k) = \gamma)$ sarà pure nulla identicamente $\bar{Q}(r, s)$ e $\bar{\psi}(r) = \gamma$.

Ed ancora come per i tensori la somma T_i^i è un invariante, cioè coincide con la somma $\bar{T}_r^r$, dalla (8) e dalle (7_2) (7_3) si trae

$$(10) \qquad \int_a^b \psi(k)dk = \int_a^b \bar{\psi}(r)dr,$$

cioè l'invarianza dell'integrale sopra scritto in dipendenza della trasformazione (8) (9).

Le (6) e (7) sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè la trasformazione (8) (9) goda delle proprietà che abbiamo messe in evidenza e da ciò discende immediatamente che il prodotto di due trasformazioni del tipo studiato è una trasformazione del medesimo tipo (il che, del resto, potrebbe essere verificato con facili calcoli). Infatti le (6) e (7) traducono: 1° che aggiungendo a $\psi(k)$ una costante il primo membro della (9) non cambia mentre il secondo membro della (8) viene aumentato di tale costante; 2° la validità della (10).

Restringendo il campo delle funzioni prese in considerazione a quello delle funzioni continue, ponendo

$$F(k, r) = M(k; r, r),$$

$$G(i, j; r) = V(i, j; r, r)$$

la trasformazione (8) (9) invece che ad una coppia di funzioni $\psi(k)$ e $Q(i, j)$ si potrebbe pensare applicata ad una sola funzione $Q(i, j)$ definita anche per $i = j$ con la posizione

$$(9') \qquad \bar{Q}(r, s) = \int_a^b M(k; r, s) Q(k, k) dk + \int_R V(i, j; r, s) Q(i, j) di dj,$$

essendo così $\psi(k) = Q(k, k)$ e $\bar{\psi}(r) = \bar{Q}(r, r)$.

Si presenterebbe anche la quistione: trovare l'operazione inversa della (8) (9). Ma forse per questo bisognerebbe passare ad operazione più generale, e cioè un' operazione funzionale lineare che trasformi due funzioni $\psi(i)$ e $Q(i, j)(i \neq j)$ in altre due $\bar{\psi}(r)$ e $\bar{Q}(r, s)(r \neq s)$ e tali che alla coppia $\psi(i) + C$, $Q(i, j)$ corrisponda la coppia $\bar{\psi}(r) + C$, $\bar{Q}(r, s)$, e che sia valida la (10).

E potrebbe forse interessare lo studio del sistema

$$\psi(r) + \lambda\bar{\psi}(r) = f(r), \quad Q(r, s) + \mu\bar{Q}(r, s) = g(r, s),$$

assegnate $f(r)$ e $g(r, s)$. nelle funzioni incognite ψ e Q essendo λ e μ parametri.

Come campo funzionale si potrebbe assumere quello delle funzioni integrabili insieme con i loro quadrati nel senso di LEBESGUE.