Lamberto Cattabriga

Metodo di separazione delle variabili e problema generalizzato di Dirichlet.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 49–54.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_49_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Metodo di separazione delle variabili e problema generalizzato di Dirichlet.

di LAMBERTO CATTABRIGA (a Bologna) (*)

Sunto. - *Esposto all'inizio del n. 1.*

1. Posizione del problema. – Per costruire la soluzione del problema ordinario di DIRICHLET per le funzioni armoniche, nel caso in cui il problema sia dato in domini di forma particolare, si usa spesso con successo il metodo di separazione delle variabili. Questo conduce a determinare un sistema Σ di funzioni armoniche nel dominio D dato, che sulla frontiera FD si riduce ad un sistema Σ' completo in senso hilbertiano; cosicchè ogni funzione di quadrato sommabile su FD è approssimabile in media mediante combinazioni lineari di funzioni di esso. Nel caso del problema ordinario, la funzione f assegnata dal problema su FD è continua e la serie costruita con le funzioni di Σ, che coincide su FD con la serie di FOURIER della f rispetto a Σ', pur potendo non convergere su FD, tuttavia converge uniformemente in ogni dominio interno a D; e si può dimostrare in vari casi, che essa rappresenta la soluzione del problema.

Si può però osservare che, anche quando i valori assegnati su FD siano espressi da una funzione supposta soltanto di quadrato sommabile, tale serie convergerà sempre in media su FD. Si porrà allora il problema di esaminare se essa rappresenti ancora una funzione armonica in $D - FD$ ed in qual senso si possa parlare di convergenza di questa funzione verso i valori assegnati dal problema su FD. Ho trattato qui il caso in cui il dominio D sia un bicilindro nello spazio ad $n + m$ (≥ 2) dimensioni e sono giunto a concludere che la serie costruita nel modo indicato converge effettivamente verso una funzione armonica in $D - FD$, la quale assume « in media » su FD i valori assegnati, ove la locuzione « in media » è da intendere nel senso introdotto da G. CIMMINO [1]. Per provare questo ho mostrato che la funzione indicata è la soluzione di un problema di DIRICHLET con condizioni al contorno opportunamente generalizzate, cosicchè ho determinato per questa via anche l'espressione della soluzione del problema generalizzato in questo caso.

(*) La presente nota è stata argomento di una comunicazione al Quinto Congresso dell'Unione Matematica Italiana svoltosi dal 6 al 12 ottobre 1955.

Con riferimento ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $(O, x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_m)$ nello spazio ad $n+m$ (≥ 2) dimensioni, il dominio bicilindrico D sia definito dalle relazioni:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 \leq b^2 \end{cases}$$

con a, b positivi. La sua frontiera è costituita dall'insieme di due porzioni S_1, S_2 rispettivamente definite da:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 \leq b^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 = b^2 \end{cases}.$$

Per la trattazione del nostro problema è conveniente servirsi di coordinate curvilinee ortogonali, tali che una di esse rimanga costante su ciascuna delle due parti di cui si compone FD. Introduciamo perciò coordinate sferiche di polo O in ciascuno dei due sottospazi $(O, x_1, x_2, \dots x_n)$ e $(O, y_1, y_2, \dots y_m)$: siano $(\rho, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1})$ e $(\sigma, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_{m-1})$ rispettivamente.

Le S_1, S_2 saranno così rappresentate da:

$$\begin{cases} \rho = a \\ \sigma \leq b \end{cases}, \qquad \begin{cases} \rho \leq a \\ \sigma = b \end{cases}.$$

Entro il dominio D consideriamo l'insieme dei domini regolari $D^{(k)}$ ciascuno limitato dalle ipersuperficie $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$ definite rispettivamente da:

$$\begin{cases} \rho = a - k \\ \sigma \leq b - k \end{cases}, \qquad \begin{cases} \rho \leq a - k \\ \sigma = b - k \end{cases}$$

con k positivo minore di a e di b.

Si ottiene così un sistema di ipersuperficie approssimanti dall'interno FD, a questa parallele ed a distanza k.

Sia ora $f(P)$ una funzione di quadrato sommabile definita su FD ed $u(P)$ una funzione definita in $D - FD$. Si dirà che $u(P)$ *converge in media* verso i valori rappresentati da $f(P)$ su FD, od anche brevemente che essa *assume in media* i valori di f su FD, se risulta:

$$\lim_{k \to 0+} \int_{FD^{(k)}} [u(Q^{(k)}) - f(Q)]^2 d\omega^{(k)} = 0$$

avendo indicato con $Q^{(k)}$ un punto variabile su $FD^{(k)}$, con Q il punto di FD che dista da esso della quantità k e con $d\omega^{(k)}$ l'elemento di $FD^{(k)}$.

Si pone allora il problema di *determinare una funzione* u(P) *armonica in* D — FD, *che assuma in media su* FD *i valori espressi da una assegnata funzione di quadrato sommabile su* FD.

2. Teorema di unicità. - Seguendo la traccia dei lavori di G. Cimmino, si considera dapprima la seguente identità fondamentale, per ogni funzione regolare in $D - FD$:

$$\frac{d}{dk}\int_{FD(k)} u^2 d\omega^{(k)} = -2\int_{V(k)} u^2 dv^{(k)} - \frac{n-1}{a-k}\int_{S_1(k)} u^2 d\sigma_1^{(k)} -$$

$$-\frac{m-1}{b-k}\int_{S_2(k)} u^2 d\sigma_2^{(k)} + 2\int_{FD(k)} u\frac{du}{dn}\, d\omega^{(k)},$$

ove si sono indicati con $V^{(k)}$ la varietà di equazioni $\begin{cases}\rho = a - k \\ \sigma = b - k\end{cases}$, con $dv^{(k)}$ il suo elemento, con $d\sigma_1^{(k)}$, $d\sigma_2^{(k)}$, gli elementi di $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$ e con n la normale interna ad $FD^{(k)}$.

Trasformando mediante le formule di Green l'ultimo integrale a secondo membro, se la u si suppone di più armonica in $D - FD$ si ottiene per ogni k sufficientemente piccolo la diseguaglianza

$$\frac{d}{dk}\int_{FD(k)} u^2 d\omega^{(k)} \leq 0\,. \tag{1}$$

Se ne trae che, se la u non è identicamente nulla, l'integrale $\int_{FD(k)} u^2 d\omega^{(k)}$ è non decrescente al decrescere di k e quindi non potrà tendere a zero per k tendente a zero, essendo positivo per ogni $k > 0$. Ogni funzione armonica in $D - FD$ tale che

$$\lim_{k \to 0+} \int_{FD(k)} u^2 d\omega^{(k)} = 0$$

non potrà dunque essere che identicamente nulla in $D - FD$. Ciò prova il Teorema di unicità: *Supposto che esista una soluzione del problema posto al n. 1, questa non può essere che unica.*

3. Ricerca del sistema di funzioni Σ. Teorema di completezza.

Il consueto metodo di separazione delle variabili applicato alla equazione $\Delta u = 0$ nelle coordinate curvilinee scelte, conduce al sistema di funzioni armoniche in D:

$$(\Sigma)\ (\rho\sqrt{-c})^{\frac{2-n}{2}} J_{\alpha_0}(\rho\sqrt{-c}) \prod_{1}^{n-2}{}_i \operatorname{sen}^{h_1+h_2+\dots+h_{n-i-1}} \varphi_i \cdot P^{(\alpha_i)}_{h_{n-i}}(\cos\varphi_i) \cdot \begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix}\Big\} h_1\varphi_{n-1} \cdot$$

$$\cdot (\sigma\sqrt{c})^{\frac{2-m}{2}} J_{\beta_0}(\sigma\sqrt{c}) \prod_{1}^{m-2}{}_j \operatorname{sen}^{k_1+k_2+\dots+k_{m-j-1}} \psi_j \cdot P^{(\beta_j)}_{k_{m-j}}(\cos\psi_j) \cdot \begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix}\Big\} k_1\psi_{m-1}$$

con

$$\alpha_i = \frac{(n-i-2)+2(h_1+\dots+h_{n-i-1})}{2}\quad i=0,\ 1,\dots n-2,$$

$$\beta_j = \frac{(m-j-2)+2(k_1+\dots+k_{m-j-1})}{2}\quad j=0,\ 1,\dots m-2,$$

$$\alpha_i,\ \beta_j \geq 0 \text{ per ogni } i,\ j,$$

ove J_{α_0}, J_{β_0} indicano funzioni di Bessel di parametri α_0 e β_0 rispettivamente, $P_r^{(s)}$ il polinomio ultrasferico di Jacobi di grado r ed indice s, mentre gli h_{n-i-1}, $i=0, 1, 2, \dots n-2$, k_{m-j-1}, $j=0$, $1, 2, \dots m-2$ sono numeri interi positivi o nulli qualunque e c è una costante arbitraria.

Possiamo supporre che la funzione f assegnata dal problema su FD, sia quasi dappertutto eguale a zero su una delle due ipersuperficie S_1, S_2 di cui si compone FD e sull'altra assuma valori espressi da una arbitraria funzione di quadrato sommabile. Se f è nulla su S_2, per costruire la soluzione del nostro problema, sceglieremo quelle funzioni del sistema Σ che sono esse pure nulle su S_2. Basterà per questo imporre che $b\sqrt{c}$ coincida con uno degli infiniti zeri $j_{\beta_0,l}$, $l=0, 1, \dots$ della funzione di Bessel $J_{\beta_0}(x)$, ciò che consente di dare a c una infinità numerabile di valori. Si ottiene così un sistema di funzioni Σ_1 dipendente da $n+m-1$ indici. Analogamente se si suppone f nulla su S_1, si giunge ad un sistema Σ_2 ancora con $n+m-1$ indici, del tutto simile al precedente. I due sistemi di funzioni così trovati si riducono su FD a due sistemi Σ_1', Σ_2' per i quali vale il

Teorema di completezza. - *I due sistemi Σ_1', Σ_2' sono ortogonali e completi su* S_1 *ed* S_2 *rispettivamente.*

Ciò segue da note proprietà di ortogonalità e chiusura dei sistemi

$$\begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix}\Big\} h_1\varphi_{n-1}\quad h_1=0, 1, 2, \dots,\ \text{e}\ \begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix}\Big\} k_1\psi_{m-1}\quad k_1=0,\ 1,\ 2, \dots \text{ in } (0,\ 2\pi),$$

$$(1-x^2)^{\frac{\alpha_i}{2}} P^{(\alpha_i)}_{h_{n-i}}(x)\quad h_{n-i}=0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

e

$$(1-x^2)^{\frac{\beta_j}{2}} P_{k_{m-j}}^{(\beta_j)}(x) \quad k_{m-j}=0, 1, 2, \dots \text{ in } (-1, 1)$$
per ogni $i=1, 2, \dots n-2$, e $j=1, 2, \dots m-2$,

$$\sigma^{\frac{1}{2}} J_{\beta_0}\left(\sigma \frac{j_{\beta_0, l}}{b}\right) l=0, 1, 2, \dots \text{ in } (0, b), \quad \rho^{\frac{1}{2}} J_{\alpha_0}\left(\rho \frac{j_{\alpha_0, l}}{a}\right) l=0, 1, 2, \dots \text{in } (0, a),$$

ossia del sistema (2) $x^{\frac{1}{2}} J_m(\alpha_{m,h} x)$ $h=1, 2, \dots$ in $(0, 1)$. [1]

4. Esistenza e determinazione della soluzione del problema.

Mediante le funzioni di Σ_2, Σ_1 costruiamo quella serie di funzioni che si riduce allo sviluppo di FOURIER della f rispetto a Σ_2', Σ_1'. Siano $s^{(\nu)}(P)$ le sue ridotte, intendendo che (ν) rappresenti il complesso dei suoi due gruppi di $n+m-1$ indici. Vale il

TEOREMA DI CONVERGENZA. – *La successione* $s^{(\nu)}(P)$ *converge uniformemente in ogni dominio interno a* D *verso una funzione* $u(P)$ *armonica in* $D-FD$ *ed assumente in media su* FD *i valori della funzione* f *assegnata.*

Infatti dalla convergenza in media della $\{s^{(\nu)}(P)\}$ alla f su FD, segue che per ogni numero positivo ε risulta

$$\int_{FD} (s^{(\mu)} - s^{(\nu)})^2 d\omega < \varepsilon, \qquad \int_{FD} (s^{(\nu)} - f)^2 d\omega < \varepsilon \tag{3}$$

non appena gli indici rappresentati da (μ), (ν) siano abbastanza elevati. La diseguaglianza (1) applicata alle funzioni $s^{(\mu)}(P) - s^{(\nu)}(P)$ armoniche in D fornisce la

$$\int_{FD^{(k)}} (s^{(\mu)} - s^{(\nu)})^2 d\omega^{(k)} \leq \int_{FD} (s^{(\mu)} - s^{(\nu)})^2 d\omega < \varepsilon.$$

Pertanto non solo la $\{s^{(\nu)}\}$ converge in media anche su ogni $FD^{(k)}$, ma, ciò che più importa, tale convergenza può dirsi uniforme rispetto a k. Qualunque siano le (μ), (ν) si ha poi:

$$\int_{D^{(k_1)}-D^{(k_2)}} (s^{(\mu)} - s^{(\nu)})^2 dP = \int_{k_1}^{k_2} dk \int_{FD^{(k)}} (s^{(\mu)} - s^{(\nu)})^2 d\omega^{(k)} \qquad (k_1 < k_2),$$

e quindi, per la diseguaglianza precedente, la quantità a primo membro si può rendere minore di un arbitrario numero prefissato,

[1] Da [2] nn. 18.25, 18.26, 18.53, 18.55 si può trarre che, mediante combinazioni lineari di funzioni del sistema (2), è possibile approssimare uniformemente in $(0.\ 1)$ tutte le funzioni del tipo $x^{m+1}(x-1)$, $x^{m+2}(x-1)$, ... Poichè queste costituiscono un sistema chiuso in $(0, 1)$, tale sarà anche (2).

non appena i (μ) e (ν) siano sufficientemente elevati indipendentemente dai valori di k_1 e k_2. Resta così provata la convergenza in media della $|s^{(\nu)}(P)|$ in $D^{(k_1)} - D^{(k_2)}$. Da questa con ragionamenti di tipo noto, si trae la uniforme convergenza della successione stessa in ogni insieme chiuso interno a $D^{(k_1)} - D^{(k_2)}$ e quindi in ogni dominio interno a D, verso una funzione u che risulterà armonica in $D - FD$. Segue inoltre che

$$\int_{FD^{(k)}} [u(Q^{(k)}) - s^{(\nu)}(Q^{(k)})]^2 d\omega^{(k)} < \varepsilon$$

qualunque sia k, purchè le (ν) siano abbastanza grandi. Se allora si scelgono le (ν) in modo che questa diseguaglianza e la seconda delle (3) siano contemporaneamente soddisfatte, tenuto conto della continuità delle $s^{(\nu)}(P)$ in D, dalla diseguaglianza

$$\sqrt{\int_{FD^{(k)}} [u(Q^{(k)}) - f(Q)]^2 d\omega^{(k)}} \leq \sqrt{\int_{FD^{(k)}} [u(Q^{(k)}) - s^{(\nu)}(Q^{(k)})]^2 d\omega^{(k)}} +$$
$$+ \sqrt{\int_{FD^{(k)}} [s^{(\nu)}(Q^{(k)}) - s^{(\nu)}(Q)]^2 d\omega^{(k)}} + \sqrt{\int_{FD^{(k)}} s^{(\nu)}(Q) - f(Q)]^2 d\omega^{(k)}}$$

appare che il primo membro avrà per limite zero quando k tende a zero, cioè che la u assume in media su FD i valori assegnati.

Con ciò è risolto il problema posto al n. 1.

Osservo infine che per il particolare dominio D qui scelto, si possono ripetere con semplici varianti i ragionamenti tenuti in una mia precedente nota [3], volta a mostrare la convergenza in senso ordinario della soluzione del problema di DIRICHLET, generalizzato secondo G. CIMMINO, verso i valori assegnati al contorno, ove questi si suppongano continui. Appoggiandosi all'identità fondamentale scritta al n. 2, si potrà infatti provare il lemma che figura in [3], mentre per ogni punto di FD si potrà sempre costruire una conveniente barriera. Se dunque i valori assegnati su FD si suppongono continui, la soluzione trovata del problema generalizzato risolve pure il problema ordinario.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione del problema generalizzato di Dirichlet,* « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », vol. LXI, (1937).
G. CIMMINO, *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson,* « Rend. del Sem. Mat, dell'Univ. di Padova », vol. XI, (1940).

[2] G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions,* (Cambridge, 1944).

[3] L. CATTABRIGA, *Osservazioni sul problema generalizzato di Dirichlet.* « Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova », vol. XXIV, (1955).