Bollettino Unione Matematica Italiana

Demore Quilghini

Interpolazione di una funzione $F(P)$ continua nei punti P di una superficie sferica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 40–45.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_40_0>

Interpolazione di una funzione $F(P)$ continua nei punti P di una superficie sferica.

Nota di DEMORE QUILGHINI (a Firenze)

Sunto. - *Si interpola una funzione* F(P), *continua nei punti* P *della superficie di una sfera* ω, *mediante una doppia successione* $\{ H_{n,m}(\varphi;\ \theta) \}$ *di polinomi trigonometrici di ordine* 2n *in* φ *e* 2m *in* θ. *Si dimostra, mediante un' opportuna scelta di punti interpolanti, la convergenza di* $\{ H_{n,m}(\varphi;\ \theta) \}$ *verso* $F(\varphi;\ \theta)$ *quando* n *ed* m *tendono, comunque, all'infinito, e questo per ogni punto* P *di* ω *esclusi i poli.*

Se la funzione $F(\varphi;\ \theta)$ *soddisfa alla condizione:*

$$|F(\varphi_1;\ \theta_1)-F(\varphi_2;\ \theta_2)| \leq L\ \{ |\cos\varphi_1-\cos\varphi_2|^{\alpha}+|\theta_1-\theta_2|^{\beta} \},$$

quando $\frac{4}{5}<\alpha\leq 1$ *e* $0<\beta\leq 1$, *essendo* L *una costante assoluta, si dà l'uniforme convergenza su tutta la sfera e si trova insieme una limitazione per l'errore.*

1. Il sistema fondamentale di punti interpolanti.

Si scelga, sulla sfera ω, un polo O (e il suo opposto O') e il primo meridiano, siano φ e θ, rispettivamente, la colatitudine polare e la longitudine di un punto sulla sfera. Dividiamone ora la superficie in $m+1$ fusi eguali con i meridiani:

$$(1_1)\qquad \theta=\theta_\mu, \qquad\qquad (1_2)\qquad \theta_\mu=\mu\frac{2\pi}{m+1},\quad \mu=0,\ 1,\ 2,\dots,\ m;$$

si tracci, inoltre, il sistema di $n+1$ paralleli:

$$(2_1)\quad \varphi=\varphi_\nu,\ 0<\varphi_\nu<\pi, \qquad\qquad (2_2)\quad P_{n+1}(\cos\varphi_\nu)=0,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n;$$

$P_{n+1}(\cos\varphi)$ essendo l'$(n+1)$-esimo polinomio di LEGENDRE.

In questo modo si ottiene sulla sfera un sistema $Q_{n,m}$ di $(n+1)\ (m+1)$ punti:

$$(3)\qquad Q_{n,m}\equiv\{ Q_{\nu,\mu}\equiv(\varphi_\nu;\ \theta_\mu) \}\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n;\ \mu=0,\ 1,\ 2\dots,\ m.$$

Il sistema $Q_{n,m}$ lo assumeremo come sistema fondamentale di punti interpolanti.

2. Relazioni fondamentali per l'interpolazione ([1]).

È noto che, posto:

$$(4)\ h_\nu(\varphi)=\left[1-\frac{P''_{n+1}(\cos\varphi_\nu)}{P'_{n+1}(\cos\varphi_\nu)}(\cos\varphi-\cos\varphi_\nu)\right]\frac{[P_{n+1}(\cos\varphi)]^2}{[P'_{n+1}(\cos\varphi_\nu)]^2[\cos\varphi-\cos\varphi_\nu]^2},$$

([1]) Per l'argomento di questa nota cfr. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali* (3ª ed., Zanichelli editore, Bologna 1952). In particolare per l'argomento di questo paragrafo cfr. cap. V, § 7, n. 3, pp. 488-490.

si ha identicamente:

$$\sum_{\nu}^{0\ldots n} h_\nu(\varphi) \equiv 1\,; \tag{5}$$

inoltre, a causa dell'equazione differenziale alla quale soddisfano i polinomi di LEGENDRE, si ha:

$$h_\nu(\varphi)=[1-2\cos\varphi\cos\varphi_\nu+\cos^2\varphi_\nu]\,\frac{[P_{n+1}(\cos\varphi)]^2}{[P'_{n+1}(\cos\varphi_\nu)]^2\,\mathrm{sen}^2\varphi_\nu[\cos\varphi-\cos\varphi_\nu]^2}, \tag{6}$$

e poichè:

$$[1-2\cos\varphi\cos\varphi_\nu+\cos^2\varphi_\nu]\geq[\cos\varphi-\cos\varphi_\nu]^2\geq 0$$

otteniamo:

(7) $|h_\nu(\varphi)|=h_\nu(\varphi)$ ed anche: (8) $h_\nu(\varphi_s)=\varepsilon_{\nu,s}=\begin{cases}1 \text{ per } \nu=s\\ 0 \text{ per } \nu\neq s\end{cases}$ $\nu=0, 1, 2,\ldots, n.$

Si ha poi ([2]):

$$|P_{n+1}(\cos\varphi)|\leq A(n+1)^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0+\eta<\varphi<\pi-\eta, \tag{9}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}|P'_{n+1}(\cos\varphi_\nu)| & \geq B(n-\nu+1)^{-2}n^{5/2}\\ \mathrm{sen}^2\varphi_\nu & \geq B(n-\nu+1)^2 n^{-2}\end{array}\right. \Bigg|\; 0<\varphi_\nu\leq\frac{\pi}{2}, \tag{9_1}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}|P'_{n+1}(\cos\varphi_\nu)| & \geq B(\nu+1)^{-2}n^{5/2}\\ \mathrm{sen}^2\varphi_\nu & \geq B(\nu+1)^2 n^{-2}\end{array}\right. \Bigg|\; \frac{\pi}{2}\leq\varphi_\nu<\pi. \tag{9_2}$$

Posto ora ([3]):

$$k_\mu(\theta)=\left[\frac{\mathrm{sen}\,(m+1)\dfrac{\theta-\theta_\mu}{2}}{(m+1)\,\mathrm{sen}\dfrac{\theta-\theta_\mu}{2}}\right]^2 \tag{10}$$

si ha:

$$\sum_{\mu}^{0\ldots n} k_\mu(\theta)\equiv 1 \tag{11}$$

e inoltre:

(12) $|k_\mu(\theta)|=k_\mu(\theta)$, (13) $k_\mu(\theta_s)=\varepsilon_{\mu,s}=\begin{cases}1 \text{ per } \mu=s\\ 0 \text{ per } \mu\neq s\end{cases}$ $\mu=0, 1, 2,\ldots, m.$

([2]) Cfr. G. SZËGO, *Orthogonal Polynomials,* « American Mathematical Society Colloquium Publication », vol. 23, New York 1939, pp. 164-232; Cfr. anche: H. N. LADEN, *An application of the classical orthogonal Polynomials to theory of interpolation.* « Duke Mathematical Journal ». VIII (1941), pp. 591-610.

([3]) Cfr. loc. cit. in ([1]), cap. V, § 10, pp. 498-506.

3. La formula di interpolazione.

Siano $F_{\nu,\mu} = F(\varphi_\nu\,;\,\theta_\mu)$ i valori che una funzione $F(\varphi\,;\,\theta)$ assume nei punti $Q_{\nu,\mu}$. Per quanto posto precedentemente la funzione:

$$H_{n,m}(\varphi\,;\,\theta) = \sum_{\nu}^{0\ldots n} \sum_{\mu}^{0\ldots m} F_{\nu,\mu} h_\nu(\varphi) k_\mu(\theta) \tag{14}$$

è un polinomio trigonometrico di ordine $2n$ e $2m$, rispettivamente in φ e θ, che nei punti $Q_{\nu,\mu}$ interpola $F(\varphi\,;\,\theta)$.

A causa poi della (5) e della (11) abbiamo:

$$\sum_{\nu}^{0\ldots n} \sum_{\mu}^{0\ldots m} h_\nu(\varphi) k_\mu(\theta) \equiv 1. \tag{15}$$

Da questa segue che se $|F_{\nu,\mu}| \leq M$ anche $|H_{n,m}(\varphi\,;\,\theta)| \leq M$.

Ciò premesso dimostriamo il

TEOREMA DI CONVERGENZA. – *Sia* F$(\varphi\,;\,\theta)$ *una funzione continua in tutti i punti della superficie della sfera* ω, *in questa ipotesi si ha:*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} |F(\varphi\,;\,\theta) - H_{n,m}(\varphi\,;\,\theta)| = 0$$

e questo per tutti i punti della sfera eccezione fatta, al più, per i poli. La convergenza è uniforme sulla superficie ottenuta da ω *escludendo i punti interni a due calotte sferiche, con centro nei poli, e raggio sferico, prefissato, arbitrariamente piccolo.*

DIMOSTRAZIONE. – A causa della (15) è:

$$F(\varphi\,;\,\theta) = \sum_{\nu}^{0\ldots n} \sum_{\mu}^{0\ldots m} F(\varphi\,;\,\theta) h_\nu(\varphi) k_\mu(\theta)$$

e, tenuto conto della (7) e della (12),

$$|F(\varphi\,;\,\theta) - H_{n,m}(\varphi\,;\,\theta)| \leq \sum_{\nu}^{0\ldots n} \sum_{\mu}^{0\ldots m} |F(\varphi\,;\,\theta) - F_{\nu,\mu}|\, h_\nu(\varphi) k_\mu(\theta). \tag{16}$$

Ora, a causa della continuità, per il teorema di CANTOR, scelto σ positivo arbitrario si può determinare un τ tale che, per ogni coppia di punti interni ad una calotta sferica, di ω, con raggio sferico τ, risulta:

$$|F(P_1) - F(P_2)| \leq \sigma.$$

Perciò, centro nel punto $P \equiv (\varphi\,;\,\theta)$ e raggio τ, per i punti $Q_{\nu,\mu} \in Q_{n,m}$ che cadono internamente alla calotta con centro P e raggio τ avremo:

$$|F(\varphi\,;\,\theta) - F_{\nu,\mu}| \leq \sigma\,;$$

mentre per i punti $Q_{\nu,\mu}$ esterni a questa calotta avremo:
$|\theta-\theta_\mu|+|\varphi-\varphi_\nu|\geq\tau$, e quindi sarà verificata una delle due disuguaglianze

$$|\theta-\theta_\mu|\geq\frac{\tau}{2} \quad \text{oppure} \quad |\varphi-\varphi_\nu|\geq\frac{\tau}{2},$$

esisterà, perciò, per i punti esterni alla suddetta calotta, un numero positivo ε, che dipende soltanto da τ, per cui risulterà una almeno delle due disuguaglianze

$$|\cos\varphi-\cos\varphi_\nu|>\varepsilon, \qquad \left|\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_\mu}{2}\right|>\varepsilon,$$

e questo per tutti i punti di ω esterni alla calotta con centro in $P\equiv(\varphi;\theta)$ e raggio sferico τ.

Premesso questo, dalla (16), tenuto conto della (15), della (11) e della (5), se indichiamo con M il massimo di $|F(\varphi;\theta)|$ su ω, avremo:

$$|F(\varphi;\theta)-H_{n,m}(\varphi;\theta)|\leq\sigma+2M\sum_{|\cos\varphi-\cos\varphi_\nu|>\varepsilon}{}' h_\nu(\varphi)+2M\sum_{\left|\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_\mu}{2}\right|>\varepsilon}{}'' k_\mu(\theta).$$

La prima somma è estesa a tutti i punti, $\in Q_{n,m}$, per cui risulta $|\cos\varphi-\cos\varphi_\nu|>\varepsilon$, la seconda è estesa a tutti i punti, $\in Q_{n,m}$, per cui risulta $\left|\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_\mu}{2}\right|>\varepsilon$.

D' altra parte abbiamo:

$$\sum_{|\cos\varphi-\cos\varphi_\nu|>\varepsilon}{}' h_\nu(\varphi)\leq\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_\nu^{0\dots n}\frac{[P_{n+1}(\cos\varphi)]^2}{[P'_{n+1}(\cos\varphi_\nu)]^2\operatorname{sen}^2\varphi_\nu},$$

ed anche, per le (9), quando $0+\eta<\varphi<\pi-\eta$, η prefissato piccolo arbitrario,

$$\sum_\nu^{0\dots n}\frac{[P_{n+1}(\cos\varphi)]^2}{[P'_{n+1}(\cos\varphi_\nu)]\operatorname{sen}^2\varphi_\nu}\leq\frac{k}{(n+1)} \quad \text{quindi} \quad \sum_{|\cos\varphi-\cos\varphi_\nu|>\varepsilon}{}' h_\nu(\varphi)\leq\frac{k'}{(n+1)\varepsilon^2}$$

essendo k e k' costanti indipendenti da n.

Con procedimento analogo ([4]) si ottiene:

$$\sum_{\left|\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_\mu}{2}\right|>\varepsilon}{}'' k_\mu(\varphi)\leq\frac{1}{(m+1)\varepsilon^2},$$

([4]) Cfr. loc. cit. in ([3]).

e quindi:

$$| F(\varphi ; \theta) - H_{n,m}(\varphi ; \theta) | \leq \sigma + \frac{8Mk}{(n+1)\varepsilon^2} + \frac{2M}{(m+1)\varepsilon^2},$$

e da questa, per l'arbitrarietà di σ, quando n ed m tendono all'∞, per $0+\eta < \varphi < \pi - \eta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, segue la convergenza di $H_{n,m}(\varphi ; \theta)$ verso $F(\varphi ; \theta)$.

4. Condizione sufficiente di convergenza su tutta la sfera e limitazione del resto nella formula di interpolazione.

Sussiste il:

TEOREMA. - *Se* $F(\varphi ; \theta)$ *è una funzione definita nei punti della sfera* ω, *ed ivi soddisfa la condizione:*

$$(17) \quad | F(\varphi_1 ; \theta_1) - F(\varphi_2 ; \theta_2) | \leq L \{ | \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 |^{\alpha} + | \theta_1 - \theta_2 |^{\beta} \}.$$

essendo L *una costante assoluta e* $\frac{4}{5} < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, *allora si ha:*

$$| F(\varphi ; \theta) - H_{n,m}(\varphi ; \theta) | \leq k \left\{ \frac{[\log(n+1)]^{2-\alpha}}{(n+1)^{\frac{5\alpha}{2}-2}} + \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{\beta}} \right\}$$

essendo k *una costante assoluta.*

DIMOSTRAZIONE.

Si ha, avendo posto $l_\nu(\varphi) = \dfrac{P_{n+1}(\cos\varphi)}{P'_{n+1}(\cos\varphi_\nu)[\cos\varphi - \cos\varphi_\nu]}$:

$$0 \leq h_\nu(\varphi) \leq \frac{4}{\operatorname{sen}^2 \varphi_\nu} l_\nu^2(\varphi) ;$$

$$0 \leq | \cos\varphi - \cos\varphi_\nu |^{\alpha} h_\nu(\varphi) \leq \frac{4}{\operatorname{sen}^2 \varphi_\nu} \left| \frac{P_{n+1}(\cos\varphi)}{P'_{n+1}(\cos\varphi_\nu)} \right|^{\alpha} | l_\nu(\varphi) |^{2-\alpha}.$$

Ora, per $0 \leq \varphi \leq \pi$ abbiamo $| P_{n+1}(\cos\varphi) |^{\alpha} \leq 1$, perciò tenuto conto delle (9_1) e (9_2) abbiamo:

$$(18) \quad 0 \leq | \cos\varphi - \cos\varphi_\nu |^{\alpha} h_\nu(\varphi) \leq \frac{k_1}{(n+1)^{\frac{5\alpha}{2}-2} (n-\nu+1)^{2(1-\alpha)}} | l_\nu(\varphi) |^{2-\alpha},$$

$$\text{per } 0 < \varphi_\nu \leq \frac{\pi}{2},$$

$$(18_1) \quad 0 \leq | \cos\varphi - \cos\varphi_\nu |^{\alpha} h_\nu(\varphi) \leq \frac{k_1}{(n+1)^{\frac{5\alpha}{2}-2} (\nu+1)^{2(1-\alpha)}} | l_\nu(\varphi) |^{2-\alpha},$$

$$\text{per } \frac{\pi}{2} \leq \varphi_\nu < \pi,$$

ora è $1-\alpha \geq 0$, quindi, qualunque sia $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, è: $(n-\nu+1)^{2(1-\alpha)} \geq 1$, $(\nu+1)^{2(1-\alpha)} \geq 1$ e quindi:

$$|\cos\varphi - \cos\varphi_\nu|\, h_\nu(\varphi) \leq \frac{k_1}{(n+1)^{\frac{5\alpha}{2}-2}} |l_\nu(\varphi)|^{2-\alpha} \qquad 0 < \varphi_\nu < \pi$$

$\left(\text{nelle nostre ipotesi è } \frac{5\alpha}{2} - 2 > 0\right)$.

È noto che (5):

$$\sum_\nu^{0\ldots n} |l_\nu(\varphi)| \leq c \log(n+1),$$

c costante indipendente da n, così si ottiene:

$$\sum_\nu^{0\ldots n} |\cos\varphi - \cos\varphi_\nu|^\alpha h_\nu(\varphi) \leq k_2 \frac{[\log(n+1)]^{2-\alpha}}{(n+1)^{\frac{5\alpha}{2}-2}} .$$

Ragionamenti analoghi (6) provano

$$\sum_\mu^{0\ldots m} |\theta - \theta_\mu|^\beta \left[\frac{\operatorname{sen}(m+1)\frac{\theta-\theta_\mu}{2}}{(m+1)\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_\mu}{2}}\right]^2 \leq k_3 \frac{\log(m+1)}{(m+1)^\beta} .$$

Da quì

$$|F(\varphi\,;\,\theta) - H_{n,m}(\varphi\,;\,\theta) \leq \sum_\nu^{0\ldots n} \sum_\mu^{0\ldots m} |F(\varphi\,;\,\theta) - F_{\nu,\mu}|\, h_\nu(\varphi) k_\mu(\theta) \leq$$

$$\leq L \left\{ \sum_\nu^{0\ldots n} |\cos\varphi - \cos\varphi_\nu|^\alpha h_\nu(\varphi) + \sum_\mu^{0\ldots m} |\theta - \theta_\mu|^\beta k_\mu(\theta) \right\} \leq$$

$$\leq k \left\{ \frac{[\log(n+1)]^{2-\alpha}}{(n+1)^{\frac{5\alpha}{2}-2}} + \frac{\log(m+1)}{(m+1)^\beta} \right\} .$$

Da questa la convergenza e la limitazione del resto.

(5) Cfr. E. Feldheim, *Théorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique*, «Mémorial des Sciences Mathematiques» fascicule XVC, Paris 1939, n. 3, pp. 5-6.

(6) Cfr. D. Quilghini, *Sull'approssimazione delle funzioni continue di due variabili mediante polinomi algebrici e trigonometrici*, «Rivista Matematica Parma», 5 (1954), (pp. 313-324), p. 323.