Bollettino
Unione Matematica Italiana

W. R. Utz

Su una nota di De Castro.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 28–30.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_28_0>

Su una nota di De Castro.

Nota di W. R. Utz (Princeton, N. J.)

Sunto. - *Si fa rilevare un errore in un lavoro di* De Castro *e si dimostrano due teoremi riguardanti la limitatezza delle soluzioni dell'equazione:* $\ddot{x} + g'(x)\dot{x} + f(x) = e(t)$.

1. In una nota apparsa recentemente in questo Bollettino, De Castro [1] considera l'equazione non lineare seguente:

$$\ddot{x} + g'(x)\dot{x} + f(x) = e(t), \qquad (\dot{x} = dx/dt,\ g'(x) = dg/dx), \tag{1}$$

la quale ammette [2], sotto certe condizioni, una soluzione periodica. De Castro aggiunge a queste condizioni l'altra

$$g'(x) > 0 \qquad f'(x) > 0.$$

Egli asserisce poi che la nota soluzione periodica di (1) è unica e stabile, nel senso che ogni soluzione di (1) tende a questa unica soluzione periodica per $t \to \infty$. Egli osserva che il suo metodo vale anche per equazioni di carattere più generale. La dimostrazione di De Castro infatti, dovrebbe esprimere il teorema seguente:

Teorema. - *Se in* (1) *è* $f'(x) > 0$, $g'(x) > 0$ *per ogni* x *reale, e se* (1) *ha una soluzione periodica, ne segue che questa soluzione periodica è unica e ogni soluzione di* (1) *definita per grandi valori di* t, *tende a questa soluzione periodica per* $t \to \infty$.

Questo teorema sembra essere errato. L'equazione di Duffing

$$\ddot{x} + c\dot{x} + (\alpha x + \beta x^3) = H \cos \omega t - G \sin \omega t \tag{2}$$

possiede come è noto [3] per alcuni valori di $c > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $H \neq 0$, $G \neq 0$, più di una soluzione periodica. Il punto *debole* della dimostrazione di De Castro sta nell'assumere che $D^2(t)$ è una funzione di distanza.

Sebbene le condizioni di De Castro valgono per la (2), le condizioni di Lefschetz [2] non sono valide e potrebbe sembrare che con le condizioni $g'(x) > 0$ e $f'(x) > 0$ insieme con le condizioni di Lefschetz, esista una dimostrazione dell'esistenza di una unica soluzione periodica di (1).

È facile vedere che a meno che $f'(x) > 0$ o $f'(x) < 0$, è possibile trovare una $e(t)$ tale che vi sono due o più soluzioni periodiche. Perciò se non si fanno ulteriori condizioni sulla $e(t)$, necessariamente dovrà supporsi $f(x)$ monotona. Per vedere ciò. osserviamo che se $f(x)$ non è monotona, $f(x) = c$, essendo c una costante, ha almeno due soluzioni $x = x_1$ e $x = x_2$ le quali sono anche due soluzioni periodiche di (1) se si sceglie $e(t) \equiv c$.

2. Urabe [4] ha provato l'esistenza di almeno una soluzione periodica di (1), con una dimostrazione simile a quella di [2], ma sotto ipotesi diverse. Vorremmo osservare che, da un esame attento di queste dimostrazioni, si può dedurre che se $e(t)$ è una funzione limitata, tutte le soluzioni di (1) sono limitate.

Teorema 1. – *Le condizioni seguenti sono sufficienti affinchè ogni soluzione di* (1) *definita per grandi valori di* t, *sia limitata per* t $\to \infty$.

i. *Le derivate* e'(t), f'(x), g'(x) *esistono per tutti i possibili valori delle proprie variabili.*

ii. e(t) *è una funzione limitata.*

iii. f(x)/x $\to \infty$ *con* | x | .

iv. *Esistono* b, B > 0, *tali che*

$$| g(x) - bf(x) | \leq B \, | x | .$$

Teorema 2. – *Le condizioni seguenti sono sufficienti affinchè ogni soluzione di* (1), *definita per grandi valori di* t, *sia limitata per* t $\to \infty$.

i. *Le derivate* e'(t), g'(x), f'(x) *esistono per ogni valore delle rispettive variabili.*

ii. e(t) *è una funzione limitata.*

iii. *Esistono due costanti positive* λ *e* μ *tali che*

a) $$\lambda + 4\mu^2 \geq \mu G(x) \geq F(x) \geq \lambda > 0$$

b) $$\lambda > \mu^2$$

dove

$$F(x) = \frac{f(x)}{x}, \qquad G(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

Per dimostrare questi teoremi consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} + g(x) &= y, \\ \dot{y} + f(x) &= e(t), \end{aligned} \tag{3}$$

che è equivalente a (1), e la forma quadratica definita

$$2u(x, y) = px^2 - 2xy + qy^2, \; pq > 1, \; p > 0.$$

Per ogni valore di t, e per ogni soluzione $x(t)$, $y(t)$ di (3) esiste un'ellisse della famiglia (4) che passa per il punto $(x(t), y(t))$ del piano (x, y).

LEFSCHETZ ha dimostrato [2] che se $q = b$, le ipotesi del TEOREMA 1 implicano l'esistenza di una costante r tale che per ogni soluzione $(x(t), y(t))$ della (3) e per

$$x^2(t) + y^2(t) > r^2,$$

ne segue

$$\dot{u}(x(t), y(t)) < 0.$$

URABE ha dimostrato anche [4] che se $p = 2\mu$ e $q = 1/\mu$ le ipotesi del TEOREMA 2 comportano l'esistenza di una costante r tale che per

$$x^2(t) + y^2(t) > r^2$$

risulta

$$\dot{u}(x(t), y(t)) < 0.$$

Ogni soluzione $(x(t), y(t))$ di (3) rimane dunque nell'interno dell'ellisse $u(x, y) = u(x(t_0), y(t_0))$ per ogni $t \geq t_0$, a condizione che questa ellisse sia abbastanza grande da contenere il cerchio $x^2 + y^2 = r^2$. Altrimenti, la soluzione rimane per tutti $t \geq t_0$ nella più piccola ellisse della famiglia (4) contenente il cerchio $x^2 + y^2 = r^2$. In entrambi i casi è chiaro che $|x(t)|$ è limitata e di conseguenza i teoremi sono dimostrati.

Evidentemente questi teoremi si possono applicare a differenti tipi di equazioni. Per $f(x) = g(x) = x^3$ vale il TEOREMA 1 ma non è valido il TEOREMA 2. Per $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ vale viceversa il TEOREMA 2 mentre il TEOREMA 1 non è valido.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANTONIO DE CASTRO, *Sopra l'equazione differenziale di risposta di un circuito elettrico*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) 9, (1954), pp. 167-169.

[2] S. LEFSCHETZ, *Lectures on differential equations*, Princeton, 1948, pp. 204-208.

[3] J. J. STOKER, *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*, New York, 1950, Chapter IV.

[4] KOJÛRÔ URABE, *On the existence of periodic solutions for certain non-linear differential equations*, « Math. Japonicae », 2 (1950), pp. 23-26.