Bollettino Unione Matematica Italiana

Cataldo Agostinelli

Nuova forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo ed esistenza di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 1–9.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Nuova forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo ed esistenza di un integrale lineare nelle velocità lagrangiane.

Nota di Cataldo Agostinelli (a Torino)

Sunto. - *Si assegna una nuova forma vettoriale alle equazioni del moto di un sistema anolonomo con vincoli indipendenti dal tempo, riducendo la questione alla considerazione del movimento di un punto immagine sulla corrispondente varietà metrica, e stabilendo la connessione con un opportuno sistema olonomo. Si fa una indagine circa l'esistenza di un integrale primo lineare nelle velocità lagrangiane e si stabiliscono le proprietà caratteristiche, geometrico-meccaniche, di questo integrale.*

1. È noto come il movimento di un sistema dinamico, comunque vincolato e sollecitato, si può rappresentare mediante il movimento di un punto immagine sopra una opportuna varietà metrica. Precisamente, se per semplicità ci riferiamo al caso di un sistema con vincoli indipendenti dal tempo, la cui configurazione in ogni istante sia individuata da n parametri lagrangiani $q_1, q_2, \dots, q_n$ e indichiamo con

(1) $$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$$

la sua energia cinetica, la varietà metrica V_n è quella il cui quadrato dell'elemento lineare è

(2) $$ds^2 = 2T dt^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs} dq_r dq_s .$$

Detto $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$ il punto che descrive questa varietà, si ha che i vettori $\dfrac{\partial Q}{\partial q_r}$ sono tangenti alle linee coordinate della varietà uscenti dal punto Q, e risulta

$$(3) \qquad \frac{\partial Q}{\partial q_r} \times \frac{\partial Q}{\partial q_s} = a_{rs} \qquad (r,\ s = 1,\ 2, \dots,\ n).$$

Inoltre le componenti tangenziali alla V_n dei gradienti delle coordinate, che indichiamo con $\operatorname{grad} q_r$, sono vettori ortogonali alle corrispondenti ipersuperficie coordinate $q_r = \text{cost.}$, e si ha

$$\operatorname{grad} q_r \times \operatorname{grad} q_s = a^{rs},$$

dove a^{rs} è l'elemento reciproco di a_{rs} nel determinante di questi coefficienti.

Indicando ancora con $\dot{Q} = \dfrac{dQ}{dt}$ la velocità del punto Q, immagine del dato sistema dinamico, mobile sulla V_n, risulta

$$(4) \qquad \dot{Q} = \sum_1^n {}_r \frac{\partial Q}{\partial q_r} \dot{q}_r$$

e quindi per le (3) e la (1) si ha che l'energia cinetica $T = \dfrac{1}{2} \dot{Q}^2$ del punto immagine, considerato di massa unitaria, coincide con quella del sistema.

Infine, se si indica semplicemente con $\dfrac{d^2 Q}{dt^2}$ la derivata seconda superficiale del punto Q rispetto al tempo, nel senso di BOGGIO (¹), cioè il vettore che rappresenta la componente tangenziale alla varietà metrica dell'accelerazione del punto Q, si ha che le componenti coovarianti di questo vettore coincidono coi binomi lagrangiani (²), cioè

$$(5) \qquad \frac{d^2 Q}{dt^2} \times \frac{\partial Q}{\partial q_r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r}, \qquad (r = 1,\ 2, \dots,\ n),$$

(¹) Cfr.: P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI FORTI, *Geometria differenziale*, P. II, Cap. III, n. 1, Zanichelli, Bologna, (1930).

(²) Cfr. T. BOGGIO, *Sulle equazioni della dinamica dei sistemi*, «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XVII, serie 6ª, 1° sem., fasc. 6, (1933). Vedi anche C. AGOSTINELLI, *Sui sistemi dinamici corrispondenti*, «Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere», vol. XXIII-XIV, serie III, fasc. V, (1937).

mentre le componenti controvarianti risultano espresse dalle

$$\frac{d^2Q}{dt^2} \times \operatorname{grad} q_i = \ddot{q}_i + \sum_{1}^{n}{}_{rs} \Gamma_{rs}{}^i \dot{q}_r \dot{q}_s, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

dove $\Gamma_{rs}{}^i$ rappresenta il simbolo di CHRISTOFFEL di 2ª specie $\left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\}$.
La (6) si deduce derivando (superficialmente) ambo i membri della (4) rispetto al tempo, moltiplicando quindi scalarmente per grad q_i e osservando che

$$\frac{\partial Q}{\partial q_r} \times \operatorname{grad} q_i = \begin{cases} 0, & \text{per} \quad r \neq i, \\ 1, & \text{per} \quad r = i, \end{cases} \tag{7}$$

e che inoltre [3]

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial q_r \partial q_s} \times \operatorname{grad} q_i = \Gamma_{rs}{}^i = \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\}. \tag{7'}$$

2. Ciò premesso supponiamo che il sistema dinamico considerato sia soggetto, altre che a quelli olonomi, ad ulteriori m ($m < n$), vincoli di mobilità anolonomi che, supposti indipendenti dal tempo, saranno espressi da m relazioni, linearmente indipendenti, della forma

$$\sum_{1}^{n}{}_r b_{kr} \dot{q}_r = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

Considerando gli m vettori $\boldsymbol{b}_k$ tangenti alla varietà metrica nel punto Q, di componenti coovarianti b_{kr}, le equazioni (8) si possono scrivere

$$\boldsymbol{b}_k \times \dot{Q} = 0, \tag{8'}$$

e gli spostamenti virtuali del sistema saranno definiti dalle equazioni

$$\boldsymbol{b}_k \times \delta Q = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{9}$$

essendo δQ uno spostamento virtuale del punto Q tangente alla varietà metrica.

In base alla rappresentazione effettuata l'equazione simbolica della dinamica dei sistemi, con vincoli bilaterali e privi di attrito, assume la forma molto semplice

$$\left(\frac{d^2Q}{dt^2} - \boldsymbol{F} \right) \times \delta Q = 0. \tag{10}$$

[3] *Loco citato* in [1], P. II, Cap. VII, n. 16.

dove $\boldsymbol{F}$ è un vettore tangente alla varietà metrica le cui componenti coovarianti F_r coincidono con le componenti lagrangiane Q_r delle forze agenti sul sistema.

Nel caso in cui sul sistema non agiscono che i soli vincoli olonomi, essendo i δQ arbitrari, dalla (10) si deduce l'equazione data da BOGGIO per questi sistemi (4). Ma essendovi ora gli ulteriori vincoli anolonomi (8), od (8'), gli spostamenti virtuali δQ non sono più arbitrari, ma devono verificare le equazioni dei legami (9). Applicando il metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE dalle (10) e (9) si deduce

$$\left(\frac{d^2 Q}{dt^2} - \boldsymbol{F} - \sum_1^m{}_h \lambda_h \boldsymbol{b}_k\right) \times \delta Q = 0,$$

e si può ora disporre dei moltiplicatori λ_h in modo da rendere arbitrari gli spostamenti δQ. Si ha in tal modo l'equazione vettoriale

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = \boldsymbol{F} + \sum_1^m{}_h \lambda_h \boldsymbol{b}_h, \tag{11}$$

che, associata alle (8'), definisce il movimento del punto immagine Q sulla varietà metrica e quindi quello del dato sistema anolonomo.

3. Si possono dalla (11) eliminare facilmente i moltiplicatori λ_h. Invero, moltiplicando ambo i membri della (11) scalarmente per il generico vettore $\boldsymbol{b}_k$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, ponendo

$$B_{hk} = \boldsymbol{b}_h \times \boldsymbol{b}_k \equiv \sum_1^n{}_{rs}\, a^{rs} b_{hr} b_{ks} \tag{12}$$

e indicando con B^{hk} l'elemento reciproco di B_{hk} nel determinante di ordine m formato con gli elementi B_{hk}, il quale determinante è certamente non nullo, essendo i vettori $\boldsymbol{b}_h$ linearmente indipendenti, si ricava

$$\lambda_h = \sum_1^m{}_k B^{hk} \left(\frac{d^2 Q}{dt^2} \times \boldsymbol{b}_k - \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{b}_k\right),$$

e pertanto la (11) diventa

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = \boldsymbol{F} + \sum_1^m{}_{hk} B^{hk} \left(\frac{d^2 Q}{dt^2} \times \boldsymbol{b}_k - \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{b}_k\right) \cdot \boldsymbol{b}_h. \tag{13}$$

(4) *Loco citato* in (2).

Tenendo conto che dalle equazioni (8′) dei vincoli anolonomi derivando superficialmente rispetto al tempo si ricava

$$\frac{d^2Q}{dt^2} \times \boldsymbol{b}_k = -\frac{d\boldsymbol{b}_k}{dt} \times \dot{Q}, \tag{14}$$

dal secondo membro della (13) si può eliminare l'accelerazione e scrivere anche

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \boldsymbol{F} - \sum_{1}^{m}{}_{hk} B^{hk}\left(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{b}_k + \frac{d\boldsymbol{b}_k}{dt} \times \dot{Q}\right)\boldsymbol{b}_h, \tag{15}$$

e questa è la forma vettoriale sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo che volevo stabilire, dalla quale si possono dedurre notevoli proprietà del movimento di questi sistemi.

La (15) mostra intanto che un sistema anolonomo, la cui configurazione in ogni istante è individuata dalla conoscenza di n parametri lagrangiani, è equivalente a un opportuno sistema olonomo con n gradi di libertà sollecitato da forze funzioni quadratiche delle velocità. Le equazioni lagrangiane corrispondenti si ottengono moltiplicando ambo i membri della (15) scalarmente per il vettore $\frac{\partial Q}{\partial q_i}$, cioè prendendo le componenti coovarianti di ambo i membri. Avendo riguardo alla (5), ed essendo

$$\boldsymbol{F} \times \frac{\partial Q}{\partial q_i} = Q_i, \quad \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{b}_k = \sum_{1}^{n}{}_{r} Q_r b_k{}^r = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a^{rs} Q_r b_{ks},$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}_k}{dt} \times \dot{Q} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \frac{\partial \boldsymbol{b}_k}{\partial q_r} \times \frac{\partial Q}{\partial q_s}\dot{q}_r\dot{q}_s = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\left(\frac{\partial b_{ks}}{\partial q_r} - \sum_{1}^{n}{}_{j} b_{kj}\Gamma_{rs}{}^{j}\right)\dot{q}_r\dot{q}_s,$$

si ricavano le equazioni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{1}^{m}{}_{hk} B^{hk} b_{hi} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\left[a^{rs}Q_r b_{ks} + \left(\frac{\partial b_{ks}}{\partial q_r} - \sum_{1}^{n}{}_{j} b_{kj}\Gamma_{rs}{}^{j}\right)\dot{q}_r\dot{q}_s\right], \tag{16}$$

$$(i = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Moltiplicando invece ambo i membri della (15) scalarmente per grad q_i, prendendo cioè le componenti controvarianti di ambo i membri, si ha, in virtù della (6), il seguente sistema normale

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + \sum_{1}^{n}{}_{rs}\Gamma_{rs}{}^{i}\dot{q}_r\dot{q}_s = Q^i - \\ - \sum_{1}^{m}{}_{hk} B^{hk} b_k{}^{i} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\left[a^{rs}Q_r b_{ks} + \left(\frac{\partial b_{ks}}{\partial q_r} - \sum_{1}^{n}{}_{j} b_{kj}\Gamma_{rs}{}^{j}\right)\dot{q}_r\dot{q}_s\right], \end{aligned} \tag{17}$$

dove è

$$Q^i = \sum_{1}^{n}{}_l\, a^{il} Q_l\,, \quad b_h{}^i = \sum_{1}^{n}{}_l\, a^{il} b_{hl}\,.$$

L'equazione (15), indipendentemente dalla considerazione dei vincoli anolonomi, ammette gli m integrali primi

$$\boldsymbol{b}_k \times \dot{Q} \equiv \sum_{1}^{n}{}_r\, b_{kr} \dot{q}_r = c_k \text{ (costante)}, \qquad (k = 1, 2, \dots, m), \tag{18}$$

che si ottengono moltiplicando ambo i membri della (15) scalarmente per il generico vettore $\boldsymbol{b}_k$ e osservando che così facendo si ricava la (14). Questi integrali si deducono anche dalle equazioni (16) moltiplicando ambo i membri per $b_k{}^i$ e sommando rispetto all'indice i da 1 ed n; oppure dalle equazioni (17) moltiplicando ambo i membri per b_{ki} e sommando rispetto allo stesso indice i.

Ne segue il teorema: *Ogni sistema anolonomo, con vincoli indipendenti dal tempo, con l'aggiunta di opportune forze funzioni quadratiche delle velocità lagrangiane, dipendenti dalle condizioni di anolonomia, è riducibile a un sistema olonomo che ammette come integrali primi i primi membri delle equazioni dei vincoli anolonomi uguagliati a costante. Fra gli infiniti movimenti possibili del detto sistema olonomo, quelli del sistema anolonomo corrispondente sono caratterizzati dall'annullare le costanti di quegli integrali.*

È opportuno osservare che, se si prescinde dalle condizioni di anolonomia, l'equazione vettoriale (15), come pure le equivalenti equazioni scalari (16), in generale non implicano il teorema delle forze vive, ma esso sussiste se si particolarizzano gli integrali (18), coll'annullare le costanti dei secondi membri, ritornando al dato sistema anolonomo. Invero in tal caso dalla (15) si ha

$$\frac{d^2Q}{dt^2} \times \frac{dQ}{dt} = \boldsymbol{F} \times \frac{dQ}{dt}, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 = \boldsymbol{F} \times \frac{dQ}{dt}$$

da cui segue

$$dT = \boldsymbol{F} \times dQ \equiv \sum_{1}^{n}{}_r\, Q_r dq_r\,,$$

che esprime appunto il teorema delle forze vive, e da cui, nel caso in cui le forze derivano da un potenziale U indipendente dal tempo, segue l'integrale dell'energia.

Osserviamo ancora come dalle (16) risulta evidente che se una data coordinata q_i è ignorabile e nelle equazioni (8) dei vincoli anolonomi manca la corrispondente velocità lagrangiana ($b_{ki} = 0$, per $k = 1, 2, \ldots, m$), la i^m delle equazioni (16) diventa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = Q_i\,,$$

e se pertanto $Q_i = 0$, come avviene nel caso in cui le forze derivano da un potenziale U in cui manca la coordinata q_i, si ha l'integrale dei momenti

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \text{cost.}$$

e si ritrova così un teorema da me dimostrato diversi anni fa in altro lavoro ([5]).

4. Ci possiamo ora domandare se e quando l'equazione (15), o il sistema (16) equivalente, ammette, oltre gli integrali (18), un ulteriore integrale primo lineare nelle velocità, distinte dai precedenti. Supposto che questo integrale esista esso sarà della forma

$$A \times \dot{Q} \equiv \sum_{1}^{n}{}_r\, A_r \dot{q}_r = \text{cost.} \tag{19}$$

dove A è un vettore tangente alla varietà metrica nel punto Q. Osserviamo intanto che il vettore A dovrà essere ortogonale a ciascuno dei vettori b_k ($k = 1, 2, \ldots, m$), dovrà cioè appartenere all'S_{n-m} euclideo tangente alla varietà metrica nel punto Q ed ortogonale all'S_m euclideo individuato dalle m direzioni dei vettori b_k.

Infatti, se così non fosse dovremmo avere

$$A = \sum_{1}^{m}{}_k\, l_k b_k$$

con l_k quantita numeriche funzioni del punto, e quindi il supposto integrale sarebbe della forma

$$\sum_{1}^{m}{}_k\, l_k b_k \times \dot{Q} = \text{cost.},$$

da cui, derivando rispetto al tempo e tenendo conto degli integrali (18), si avrebbe

$$\sum_{1}^{m}{}_k\, \frac{dl_k}{dt} c_k = 0,$$

([5]) C. Agostinelli, *Sull'esistenza di integrali di un sistema anolonomo con coordinate ignorabili*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 80, (1944-45).

cioè per l'arbitrarietà delle costanti c_k si avrebbe $\frac{dl_k}{dt}=0$, $l_k=\text{cost.}$ $(k=1, 2,\dots, m)$, e il detto integrale verrebbe ad essere una combinazione lineare a coefficienti costanti degli integrali (18). Dunque se $A \times \dot{Q}=\text{cost.}$ è un integrale primo dell'equazione (15), distinto dagli integrali (18), deve essere intanto

$$A \times b_k = 0, \qquad (k=1, 2,\dots, m). \tag{20}$$

Dalla (19), derivando superficialmente rispetto al tempo, e tenendo conto dell'equazione (15), nonchè delle condizioni (20), si deduce che deve essere identicamente

$$\frac{dA}{dt} \times Q + A \times F = 0,$$

e pertanto devono annullarsi separatamente i termini indipendenti dalle velocità e quelli quadratici nelle medesime, cioè

$$A \times F \equiv \sum_{1}^{n}{}_r\, a^{rs} A_r Q_s = 0 \tag{21}$$

$$\frac{dA}{dt} \times \dot{Q} \equiv \frac{dA}{dQ}\, \dot{Q} \times \dot{Q} = 0 \tag{22}$$

La (22) mostra che l'omografia $\frac{dA}{dQ}$ (operatore lineare che trasforma vettori tangenti alla varietà metrica nel punto Q in vettori tangenti alla medesima nello stesso punto), dovrà essere un'*assiale* e quindi

$$\frac{dA}{dQ}\frac{\partial Q}{\partial q_r} \times \frac{\partial Q}{\partial q_s} + \frac{dA}{dQ}\frac{\partial Q}{\partial q_s} \times \frac{\partial Q}{\partial q_r} \equiv \frac{\partial A}{\partial q_r} \times \frac{\partial Q}{\partial q_s} + \frac{\partial A}{\partial q_s} \times \frac{\partial Q}{\partial q_r} = 0,$$
$$(r, s=1, 2,\dots, n),$$

che esplicitata diventa

$$\frac{\partial A_s}{\partial q_r} + \frac{\partial A_r}{\partial q_s} - 2\sum_{1}^{n}{}_{i,j}\, a^{ij}\Gamma_{rs,j} A_i = 0, \qquad (r, s=1, 2,\dots, n), \tag{23}$$

dove

$$\Gamma_{rs,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial q_s} + \frac{\partial a_{sj}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial q_j}\right)$$

rappresenta il simbolo di CHRISTOFFEL di 1ª specie $\begin{bmatrix} r\,s \\ j \end{bmatrix}$.

Dalle (23) risulta che le componenti del vettore A dipendono unicamente dai coefficienti della forma quadratica (2) e pertanto l'integrale richiesto sarà necessariamente un integrale delle geodetiche della varietà metrica. Abbiamo allora il seguente teorema:

Affinchè un sistema anolonomo con vincoli indipendenti dal tempo, i cui vincoli anolonomi siano espressi sinteticamente dalle equazioni (8'), *ammetta un integrale primo lineare nelle velocità lagrangiane e della forma* (19), *è necessario, ed anche sufficiente, che questo sia un integrale delle geodetiche della varietà metrica e che inoltre* [in virtù delle (21) e (20)], *il vettore* $\mathbf{F}$ *che rappresenta le forze agenti sul sistema e i vettori* $\mathbf{b}_k$ *da cui dipendono le condizioni di anolonomia, siano ortogonali al vettore* $\mathbf{A}$ *che definisce lo stesso integrale.*

È ovvio che una volta fissata la forma quadratica (2), nota cioè l'espressione dell'energia cinetica T, e supposto che le geodetiche della varietà metrica corrispondente ammettano un integrale del tipo (19), si possono individuare infiniti sistemi anolonomi che ammettono lo stesso integrale, si possono cioè determinare in infiniti modi dei vettori $\boldsymbol{b}_k$ ed $\boldsymbol{F}$ soddisfacenti alle condizioni di ortogonalità (20) e (21).

Così per esempio, nel caso in cui l'energia cinetica T ha forma ortogonale, cioè del tipo

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_r^n H_r^2 \dot{q}_r^2, \quad (a_{rs} = 0, \text{ per } r \neq s;\ a_{rr} = H_r^2), \tag{24}$$

ed i coefficienti H_r^2 hanno l'espressione

$$H_r^2 = A_r \psi_r'(q_r) \prod_{\substack{1 \\ i \neq r}}^{n} (\psi_r - \psi_i), \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

dove ciascuna funzione ψ_r dipende dal solo parametro q_r che ha lo stesso indice, ed è $\psi_r' = d\psi_r / dq_r$, ed A_r costante arbitraria, le geodetiche, come ho mostrato in una memoria degli Annali di Matematica del 1942 ([6]), ammettono l'integrale primo lineare

$$\Sigma_r{}_1^n \frac{H_r^2}{\psi_r'} \dot{q}_r = \text{cost.}$$

Sistemi onolonomi che ammettono lo stesso integrale, con condizioni di anolonomia della forma (18) si otterranno assumendo i vettori $\boldsymbol{b}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ fra di loro linearmente indipendenti e appartenenti all'S_{n-1} euclideo tangente alla varietà metrica nel punto Q e ortogonale al vettore tangenziale $\boldsymbol{A}$ di componenti coovarianti $A_r = H_r^2/\psi_r'$. Allo stesso S_{n-1} dovrà appartenere il vettore $\boldsymbol{F}$ che rappresenta le forze.

([6]) C. Agostinelli, *Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica*, « Annali di Matematica », serie IV, tomo XXI, 1942, pp. 39-111).