Luigi Castoldi

Irreversibilità delle catene ordinarie di Markov.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.1, p. 16–21.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_1_16_0>

Irreversibilità delle catene ordinarie di MARKOV.

Nota di LUIGI CASTOLDI (a Cagliari)

Sunto. - *Si definiscono catene* ordinarie *di* MARKOV *(regolari, con modulo diverso da zero) e si pongono, attorno ad esse, riprendendo taluni risultati di* KOLMOGOROV, *due problemi di natura retrospettiva:*

1°) *Ricostruzione della* storia *di una attuale distribuzione* $\mathbf{p}_0$, *nell'ipotesi che a questa abbia condotto l'applicazione iterata del processo elementare di transizione appartenente alla catena assegnata;*

2°) *Determinazione di una* catena Markoviana inversa *della data, definita come quella che, applicata a* $\mathbf{p}_0$ *realizza la ricostruzione descritta- Si mostra che mentre il primo problema è sempre risolubile in modo univoco, non lo è mai, in senso stretto, il secondo. Col risultato che mentre una assegnata catena ordinaria converge verso una distribuzione asintotica* $\mathbf{p}_\infty$ *indipendente da* $\mathbf{p}_0$, *ad ogni siffatta distribuzione attuale corrisponde per contro una diversa* storia *non convergente verso alcuna origine determinata. Si trae motivo da ciò per una definizione di* tempo stocastico, *come variabile irreversibilmente legata ai processi ordinari di* MARKOV.

Si riconducono infine alle proprietà di convergenza di tali processi le apparenze teleologiche che si manifestano nella realtà fenomenica; con possibile distinzione tra fenomeni a tendenza evolutiva *(processi di organizzazione e selezione, in particolare biologici) e fenomeni a tendenza* dissolutiva *(processi diffusivi e di livellamento, in particolare termodinamici).*

1. Oggetto del lavoro e richiami attorno alle catene regolari finite di MARKOV.

Le considerazioni contenute nel presente lavoro illustrano in un caso particolare e approfondiscono sotto qualche aspetto noti risultati di A. KOLMOGOROV [1] attorno all'inversione delle catene di MARKOV. In particolare precisano la natura non Markoviana e non convergente della catena inversa di una data, regolare, questa, finita e di modulo diverso da zero.

Per svolgere tale compito occorrono alcuni brevi richiami sul problema del comportamento asintotico delle catene di MARKOV. È noto che tale problema ha avuto completa soluzione, principalmente ad opera di FRÉCHET [2], di KENDALL [3] e di FELLER [4],

[1] A. KOLMOGORÓV, *Zur Theorie der Markoffsche Ketten*, « Math. Annalen », **112** (1936), 156-160.

[2] M. FRÉCHET, *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*, Traité de Calcul des Probabilitès, **1**, n. 3 (Paris).

[3] D. G. KENDALL, *Stochastic processes and population growth*, « J. R. Statistic. Soc. B », **11**, 230.

[4] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its applications*, (New York).

nel caso che dirò *permanente*, di un'unica matrice $\mathbf{Q}$ operante le successive transizioni della catena. Mi limiterò anche a considerare distribuzioni di variabili ad un numero finito k di valori; considerando dunque, come dirò, catene *permanenti* e *finite* di MARKOV.

In tali ipotesi, l'accennato comportamento asintotico dipende, come si sa, dalla configurazione e dalla molteplicità degli autovalori distinti λ_i di $\mathbf{Q}$ $(i = 1, 2, \dots, h \leq k)$.

Precisamente, disponendo tali autovalori in ordine di modulo decrescente e, a parità di modulo, in ordine di crescente anomalia, si ha sempre $\lambda_1 = 1$ e quindi $\|\lambda_j\| \leq 1$ $(j = 2, 3, \dots, h)$. Inoltre — amenochè l'autovalore $\lambda_1 = 1$ sia multiplo, o esistano autovalori di modulo 1, semplici o no, diversi da 1 — la catena di MARKOV è *regolare*, nel senso che, in corrispondenza a qualsivoglia distribuzione iniziale $\mathbf{p}_0$ della variabile stocastica fondamentale, esiste un'unica distribuzione asintotica $\mathbf{p}_\infty$ per cui è

$$(1) \qquad \begin{aligned} \mathbf{p}_\infty &= \lim_{r \to \infty} \mathbf{p}_r = \lim_{r \to \infty} \mathbf{Q}^r \mathbf{p}_0 = \\ &= \mathbf{Q}^\infty \mathbf{p}_0 . \end{aligned}$$

Considerando dunque catene *regolari finite* di MARKOV, il calcolo di $\mathbf{p}_\infty$ si consegue per via algebrica immediata, giacchè, denotando con $\mathbf{s}_1$ l'autovettore semplice di $\mathbf{Q}$ corrispondente a $\lambda_1 = 1$, si ha senz'altro (5);

$$(2) \qquad \mathbf{p}_\infty = \mathbf{s}_1 .$$

Si noterà che la convergenza di $\mathbf{Q}^r$ a $\mathbf{Q}^\infty$ non basta, da sola ad assicurare il comportamento regolare della catena, giacchè, come risulta da (1) il verificarsi di tale condizione non implica necessariamente l'indipendenza di $\mathbf{p}_\infty$ da $\mathbf{p}_0$. Per la regolarità è necessario e sufficiente che le colonne di $\mathbf{Q}^\infty$ risultino tutte uguali e pertanto — denotando brevemente con s_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ le componenti di $\mathbf{s}_1$ — $\mathbf{Q}^\infty$ della forma:

$$(3) \qquad \mathbf{Q}^\infty = \begin{pmatrix} s_1 & s_1 \dots s_1 \\ s_2 & s_2 \dots s_2 \\ \vdots & \vdots \\ s_k & s_k \dots s_k \end{pmatrix} .$$

La semplice esistenza di $\mathbf{Q}^\infty$ è legata all'esistenza di autovalori λ_j di modulo 1, diversi da 1. La struttura (3) di $\mathbf{Q}^\infty$, e con essa la regolarità del processo è assicurata dal carattere semplice di λ_1.

(5) Per questi richiami mi riferisco all'eccellente opera di M. S. BARTLETT, *An Introduction to Stochastic Processes*, Cambridge (1955).

Catene non regolari non soddisfano all'una o all'altra di tali condizioni (rispettivamente catene ergodiche o a distribuzione asintotica dipendente da $\mathbf{p}_0$), e vanno ritenute, per loro stessa definizione, catene di natura eccezionale.

Considererò pertanto nel seguito catene *regolari finite* di MARKOV.

Termino questi richiami ricordando il caso particolare di catene regolari a matrice fondamentale *doppiamente stocastica* (in particolare *simmetrica*) (6), per la quale cioè è unitaria la somma degli elementi di ogni riga — oltrechè, come sempre, di ogni colonna —. Per matrici regolari doppiamente stocastiche, e soltanto per esse, si ha

$$\mathbf{Q}^{\infty} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \cdots \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \cdots \frac{1}{k} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \cdots \frac{1}{k} \end{pmatrix} \tag{3'}$$

e conseguentemente una distribuzione asintotica *uniforme*:

$$\mathbf{p}_{\infty} = \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \\ \vdots \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Dirò *dissolutiva* una catena regolare di MARKOV a distribuzione asintotica uniforme; e *selettiva* ogni altra catena regolare, con *selettività* definibile, per esempio, come *precisione* (7) o *contenuto informativo* di WIENER della corrispondente distribuzione asintotica.

2. Duplice aspetto del problema dell' inversione di una catena regolare finita di MARKOV.

Occorre distinguere due aspetti sotto cui si pone il problema dell'inversione di una catena regolare finita di MARKOV:

1°) Ricostruzione della *storia* di una attuale distribuzione $\mathbf{p}_0$ nell'ipotesi che a questa abbia condotto l'applicazione iterata del

(6) W. FELLER, Opera citata nel richiamo (4), p. 327.

(7) L. CASTOLDI, *Di alcune proprietà del contenuto informativo di* WIENER *come* « precisione » *di una informazione.* Atti della Accademia Ligure di Scienze e Lettere (in corso di stampa).

processo elementare di transizione appartenente alla matrice $\mathbf{Q}$ della catena assegnata.

2°) Determinazione di una *catena inversa* della data, definita come quella che, applicata a $\mathbf{p}_0$ realizza la ricostruzione descritta.

A) Il primo problema è subito univocamente risolto nell'ipotesi, che aggiungerò alle precedenti per completare la definizione di catena *ordinaria* di MARKOV:

$$\Delta \equiv \det(\mathbf{Q}) \neq 0. \tag{5}$$

Dalla relazione

$$\sum_{j=1}^{k} Q_{i/j} \overset{(-1)}{p_j} = \overset{(0)}{p_i}, \tag{6}$$

moltiplicando a sinistra per la matrice inversa $\mathbf{Q}'^{-1}$ (trasposta della reciproca) di $\mathbf{Q}$, si trae infatti:

$$\sum_{i=1}^{k} Q'^{-1}_{ji} \overset{(0)}{p_i} = \overset{(-1)}{p_j}. \tag{7}$$

In generale, dopo r transizioni inverse consecutive, si ottiene:

$$\left[\begin{aligned} \overset{(-r)}{p_j} &= \sum_{i=1}^{k} Q'^{-1}_{ji} \overset{-(r-1)}{p_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{k} Q'^{-r}_{ji} \overset{(0)}{p_i}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Le relazioni (7), (8) risolvono dunque univocamente il primo problema. Ma va notato che le matrici che intervengono in esso non hanno, per costruzione $[\det(\mathbf{Q}'^{-1}) = \Delta^{-1} > 1]$ carattere Markoviano; benchè — come risulta da (7), applicabile a una generica distribuzione $\mathbf{p}_0$ — sia in esse unitaria la somma degli elementi di ogni colonna.

Essendo inoltre

$$\lim_{r \to \infty} \det(\mathbf{Q}'^{-r}) = \lim_{r \to \infty} \Delta^{-r} = \infty, \tag{9}$$

si conclude immediatamente che non esiste una distribuzione asintotica originaria $\mathbf{p}_{-\infty}$ indipendente da $\mathbf{p}_0$. Una siffatta distribuzione richiederebbe infatti esistente $\mathbf{Q}'^{-\infty}$ dotata di uguali colonne e pertanto $\lim_{r \to \infty} \Delta^{-r} = 0$. Questo risultato esclude a priori l'esistenza di una catena regolare *inversa* della data, e anticipa pertanto parzialmente la soluzione negativa del secondo problema.

B) Di fatto, la ricerca di matrici Markoviane atte a ricostruire la storia di $\mathbf{p}_0$ conduce, come ha mostrato KOLMOGOROV, alla considerazione di *probabilità condizionali retrospettive* (probabilità *inverse*, secondo la denominazione di quell'Autore), definite, conformemente al teorema di BAYES, dalle formule

$$\left[\begin{aligned} \overset{[-r/-(r-1)]}{R}_{j/i} &= \frac{1}{\overset{-(r-1)}{p}_i}\, Q_{i/j}\, \overset{(-r)}{p}_j = \\ &= Q_{i/j} \sum_{s=1}^{k} Q'^{-1}_{js} \frac{\overset{-(r-1)}{p}_s}{\overset{-(r-1)}{p}_i} \end{aligned}\right. \qquad (r=1,\ 2,\ldots), \tag{10}$$

porgenti, in particolare, per $r=1$:

$$\overset{(-1/0)}{R}_{ij} = Q_{ij} \sum_{s=1}^{k} Q'^{-1}_{js} \frac{\overset{(0)}{p}_s}{\overset{(0)}{p}_i}. \tag{10_1}$$

Le relazioni (10) definiscono una successione di matrici *di tipo* Markoviano, giacchè è, per esse:

$$\left[\begin{aligned} &\overset{[-r/-(r-1)]}{R}_{j/i} \geqq 0, \\ &\sum_{j=1}^{k} \overset{[-r/-(r-1)]}{R}_{j/i} = \sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k} Q_{i/j} Q'^{-1}_{js}\right) \frac{\overset{-(r-1)}{q}_s}{\overset{-(r-1)}{q}_i} \\ &\qquad = \sum_{s=1}^{k} \delta_{is} \frac{\overset{-(r-1)}{q}_s}{\overset{-(r-1)}{q}_i} = 1. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Ma tali matrici, non solo non hanno carattere permanente, bensì tutte *diversamente dipendono* dalla distribuzione attuale $\mathbf{p}_0$.

Da (10) si trae infatti, alternativamente, ricordando (8):

$$\overset{[-r/-(r-1)]}{R}_{j/i} = Q_{i/j} \frac{\sum_{s=1}^{k} Q'^{-r}_{js} \overset{(0)}{p}_s}{\sum_{s=1}^{k} Q'^{-(r-1)}_{is} \overset{(0)}{p}_s}, \tag{13}$$

e, successivamente,

$$\overset{[-r/0]}{R}_{j/i} = Q^{r}_{i/j} \frac{\sum_{s=1}^{k} Q'^{-r}_{js} \overset{(0)}{p}_s}{\overset{(0)}{p}_i}. \tag{14}$$

Suppongasi ora, per tentativo, esistente una distribuzione asintotica originaria $\mathbf{p}_{-\infty}(\mathbf{p}_0)$ dipendente da $\mathbf{p}_0$.

Dall'identità in r e in $\mathbf{p}_0$

$$\sum_{j=1}^{k} Q^{r}_{i/j} \sum_{s=1}^{k} Q'^{-r}_{js} \overset{(0)}{p}_s = \overset{(0)}{p}_i \qquad (r=1,\ 2,\ldots), \tag{15}$$

si trae, nell'ipotesi ammessa, passando al limite per $r \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{k} Q^{\infty}_{i/j} \overset{(-\infty)}{\mathbf{p}}_j(\mathbf{p}_0) = \overset{(0)}{p}_i, \tag{16}$$

contrariamente alla natura *ordinaria* di **Q**, onde è, per ogni distribuzione **v** :

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q^{\infty}_{i/j} v_j = s_i \,. \tag{16'}$$

È dunque da concludere che *il processo retrospettivo della storia di* $\mathbf{p}_0$, *in relazione alla assegnata catena ordinaria di* MARKOV, *non è, per contro, Markoviano in senso stretto; e, comunque, non converge verso alcuna determinata distribuzione asintotica originaria.*

Fa eccezione il caso in cui già sia $\mathbf{p}_0$ coincidente con $\mathbf{s}_1$ nel quale la catena ha carattere statico con distribuzione fissa $\mathbf{s}_1$.

3. Cenno ad una interpretazione positivistica dell'apparente finalismo nel decorso naturale della realtà fenomenologica.

La convergenza rilevata di ogni catena ordinaria di MARKOV, e, per contro, la indeterminatezza del corrispondente processo retrospettivo, determinano un *ordinamento univoco* nella successione degli stadi (distribuzioni) di ogni siffatta catena: *Di due distribuzioni appartenenti ad una medesima siffatta catena, una, ben determinata, è successiva dell'altra.*

Questa constatazione equivale a legare ad ogni catena ordinaria di MARKOV una nozione (ametrica) di *tempo*; una distinzione assoluta (inerente a quella catena) di *passato* e di *futuro*.

Di più: l'esistenza, per ogni catena ordinaria, di una configurazione limite futura, determina un'apparenza teleologica nell'evoluzione del processo Markoviano.

Tutto ciò sembra giustificare una concezione positivistica del divenire della realtà fenomenica, consistente in una interpretazione — pur grossolana e schematica — di questa quale sovrapposizione di innumerevoli processi ordinari di MARKOV, responsabili sia della nozione universalmente univoca del tempo, sia delle apparenti *finalità* insite nel decorso dei fenomeni naturali.

L'esistenza, infine, di processi Markoviani ordinari selettivi e dissolutivi sembra anche spiegare il *manifesto disegno* cui obbediscono talune particolari categorie di fenomeni (fatti organizzativi e di selezione in genere, processi biologici); e l'apparente tendenza dissolutiva di altri (fisica statistica, processi di livellamento, in particolare termodinamici).

OSSERVAZIONE. – Tutte le considerazioni fatte si trasferiscono al caso di processi continui nel tempo, dove l'ipotesi di inesistenza di autovalori di modulo 1 diversi da 1 per la matrice istantanea di trasformazione è automaticamente soddisfatta [8].

[8] M. S. BARTLETT, Opera citata nel richiamo [5], p. 52-53.