Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Gatteschi

Sulla rappresentazione asintotica delle funzioni di Bessel di uguale ordine ed argomento.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 531–536.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_531_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Sulla rappresentazione asintotica delle funzioni di Bessel di uguale ordine ed argomento.

Nota aggiuntiva di LUIGI GATTESCHI (a Bari)

Sunto. - *Nel n. 1 si mostra come una inesattezza contenuta in un precedente lavoro non altera i risultati ivi conseguiti. Nel n. 2 viene stabilita una semplicissima formula asintotica per* $Y_\nu(\nu)$*; questa formula permette nel n. 3 di migliorare una recente disuguaglianza di* K. M. SIEGEL *e* F. B. SLEATOR.

1. La Memoria dello stesso titolo inserita nel T. 38, (1955), degli Annali di Matematica pura ed applicata, da pag. 267 a pag. 280, (Memoria che indicheremo nel seguito con « M »), contiene a pag. 275 una inesattezza: infatti la funzione $\operatorname{senh} z - z$ non ha nel segmento OA la sua parte reale negativa come occorrerebbe per la validità della relazione

$$e^{\nu(\operatorname{senh} z - z)} \prec \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(-6)^m}{m!} A_k^{(m)} e^{\frac{2(m+k)\pi i}{3}} \rho^{2(m+k)} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \ll$$

$$\ll \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(6\cosh\rho)^m}{m!} A_k^{(m)} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)},$$

essendo gli $A_k^{(m)}$ dati dalla (6) di pag. 272 di « M ».

Tuttavia, come ora mostreremo, le formule stabilite in « M » continuano a sussistere. Basta per questo procurarci una maggiorante più « aderente » per la serie inviluppante la funzione $\operatorname{senh} z - z$.

Riprendiamo la questione dalla valutazione dell'integrale

$$I_1 + iI_2 = \int_0^A e^{\nu(\operatorname{senh} z - z)} dz,$$

dove $A = \pi/\sqrt{3} + i\pi$.

Posto $z = \rho e^{i\pi/3}$, si ha

$$I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi/\sqrt{3}} e^{-\nu\rho^3/6} e^{\nu u(\rho)} e^{i\pi/3} d\rho, \tag{1}$$

con

$$u(\rho) = \operatorname{senh} \rho e^{i\pi/3} - \rho e^{i\pi/3} + \rho^3/6. \tag{2}$$

È

$$u(\rho) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^{2k+3}}{(2k+3)!} e^{(2k+3)\pi i/3} + R_n(\rho), \tag{3}$$

e, se poniamo

$$U_n = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^{2s}}{(2n+2s+3)!} \cos\frac{2s\pi i}{3}, \qquad V_n = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho^{2s}}{(2n+2s+3)!} \operatorname{sen}\frac{2s\pi i}{3},$$

per il termine complementare $R_n(\rho)$, si ha

$$R_n(\rho) = e^{(2n+3)\pi i/3} \rho^{2n+3} (U_n + i V_n).$$

Si prova facilmente che per $0 \leq \rho \leq 2\pi/\sqrt{3}$ e $n = 1, 2, \ldots$, è

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{(2n+3)!}, \quad 0 \leq V_n \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\rho^2}{(2n+5)!} < \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{4\pi^2}{9(2n+3)!\, 6 \cdot 7},$$

da cui

$$| U_n + i V_n | < \frac{1{,}1}{(2n+3)!},$$

quindi

$$| R_n(\rho) | \leq \frac{1{,}1}{(2n+3)!} \rho^{2n+3}, \qquad \left(0 \leq \rho \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

Ne segue per la (3)

$$u(\rho) \prec - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{2k+3}}{(2k+3)!} e^{2k\pi i/3} \ll \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1{,}1}{(2k+3)!} \rho^{2k+3}. \tag{4}$$

Osservato inoltre che è, per $0 \leq \rho \leq 2\pi/\sqrt{3}$,

$$0 \leq \boldsymbol{R} u(\rho) \leq \frac{\rho^5}{5!} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{6 \cdot 7}\right) \leq \frac{\rho^5}{5!}\, 0{,}58 \leq \frac{\rho^3}{6}\, 0{,}4,$$

avremo

$$e^{\nu u(\rho)} \prec \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [\nu u(\rho)]^m \ll \sum_{m=0}^{\infty} | \nu u(\rho) |^m e^{\nu \frac{\rho^3}{6} 0{,}4},$$

e quindi, per la (4), applicando il teorema della sostituzione formale, (si veda n. 2 di « M »),

$$e^{\nu u(\rho)} \prec \sum_{k, m=0}^{\infty} \frac{(-6)^m}{m!} A_k^{(m)} e^{2(m+k)\pi i/3} \rho^{2(m+k)} \left(\frac{\nu \rho^3}{6}\right)^m \ll$$

$$\ll \sum_{k, m=0}^{\infty} \frac{(6 \cdot 1{,}1)^m}{m!} A_k^{(m)} \left(\frac{\nu \rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)} e^{\nu \frac{\rho^3}{6} 0{,}4}.$$

Da questa e dalla (1) segue

$$I_1 + iI_2 \prec \sum_{k,\, m=0}^{\infty} \frac{(-6)^m}{m\,!} A_k^{(m)} e^{\frac{2(m+k)+1}{3}\pi i} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} e^{-\nu\frac{\rho^3}{6}} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)} d\rho <<$$

$$<< \sum_{k,\, m=0}^{\infty} \frac{6^m}{m\,!} A_k^{(m)} \bar{J}_{k,\,m}\,,$$

dove

$$\bar{J}_{k,\,m} = \int_0^{2\pi/\sqrt{3}} (1{,}1)^m e^{-\frac{\nu\rho^3}{6}0{,}6} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)} d\rho. \tag{5}$$

In « M » in luogo degli integrali $\bar{J}_{k,m}$ figurano gli integrali

$$J^*_{k,\,m} = \int_0^{2\pi/\sqrt{3}} (\cosh\rho)^m e^{-\nu\rho^3/6} \left(\frac{\nu\rho^3}{6}\right)^m \rho^{2(m+k)} d\rho,$$

per i quali sussiste la disuguaglianza, (« M », p. 277),

$$J^*_{p-m,\,m} < J_{p-m,\,m} \leq e^{\frac{2}{3}m} \sqrt{\frac{2m}{\nu}} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+m+1}{2}} \frac{(2m)^{\frac{2p+3m+1}{2}}}{2p+3m+1} +$$

$$+ \frac{1}{3} 2^{\frac{2p+3m+1}{3}} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} \Gamma\left(\frac{2p+1}{3} + m\right).$$

Tutte le formule stabilite in « M » risulteranno pertanto valide qualora si provi che, per $0 \leq m \leq p$, risulta

$$\bar{J}_{p-m,\,m} < e^{\frac{2}{3}m} \sqrt{\frac{2m}{\nu}} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+m+1}{2}} \frac{(2m)^{\frac{2p+3m+1}{2}}}{2p+3m+1} + \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{3} 2^{\frac{2p+3m+1}{3}} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}} \Gamma\left(\frac{2p+1}{3} + m\right).$$

Se nella (5) poniamo

$$\frac{\nu\rho^3}{10} = t$$

si ha

$$\bar{J}_{k,\,m} = (1{,}1)^m \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2(m+k)+1}{3}} \frac{1}{3} \left(\frac{5}{3}\right)^{m+\frac{2(m+k)+1}{3}} \int_0^{4\nu\pi^3/15\sqrt{3}} e^{-t} t^{m+\frac{2(m+k)-2}{2}} dt <$$

$$< \frac{(1{,}1)^m}{3} \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2(m+k)+1}{3}} \left(\frac{5}{3}\right)^{m+\frac{(2m+k)+1}{3}} \Gamma\left(\frac{2(m+k)+1}{3} + m\right),$$

e quindi

$$\bar{J}_{p-m,m} < \frac{(1,1)}{3}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{2p+1}{3}}\left(\frac{5}{3}\right)^{m+\frac{2p+1}{3}}\Gamma\left(\frac{2p+1}{3}+m\right).$$

Da quest'ultima disuguaglianza segue la validità della (6), è infatti per m e p non negativi

$$(1,1)^m\left(\frac{5}{3}\right)^{m+\frac{2p+1}{3}} < 2^{\frac{2p+3m+1}{3}}.$$

2. Analogamente a quanto abbiamo fatto in « M » per $J_\nu(\nu)$, vogliamo ora stabilire una semplicissima formula per $Y_\nu(\nu)$.

Dalla (17) di « M » si ha

$$Y_\nu(\nu) = \frac{-1}{3\pi}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}}\left(B_0 + D_0\cos\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\varepsilon+\eta_1}{\pi},$$

con

$$|\varepsilon| < \frac{e^{-\nu\pi/\sqrt{3}}}{\nu},$$

$$|\eta_1| \leq \frac{6}{\nu}\left\{e^{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\nu}}}\left(\frac{6}{\nu}\right)\frac{2^3}{6} + \frac{2^3}{3}\Gamma(2)\right\}(A_1^{(0)} + A_0^{(1)}) =$$

$$= \frac{2}{5\nu}\left(\frac{e^{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\nu}}}}{\nu} + \frac{1}{3}\right),$$

ed avendosi inoltre

$$D_0 = \Gamma\left(\frac{1}{3},\ \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3\frac{\nu}{6}\right), \qquad B_0 = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

ne segue

$$Y_\nu(\nu) = \frac{-1}{3\pi}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{3},\ \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3\frac{\nu}{6}\right)\right\} + \frac{\varepsilon+\eta_1}{\pi}. \tag{7}$$

Volendo evitare l'uso della funzione gamma incompleta basta osservare che

$$\Gamma\left(\frac{1}{3},\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3\frac{\nu}{6}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \vartheta e^{-\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3\frac{\nu}{6}}\left\{\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3\frac{\nu}{6}\right\}^{-\frac{2}{3}}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Possiamo allora scrivere

$$Y_\nu(\nu) = \frac{-1}{2\pi}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \rho^*,$$

dove

$$|\rho^*| \leq \frac{1}{\nu\pi} e^{-\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^2 + \frac{\varepsilon + \eta_1}{\pi} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\nu\pi} \left\{ e^{-\frac{\nu\pi}{\sqrt{3}}} + \frac{2}{5}\left(\frac{e^{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\nu}}}}{\nu} + \frac{1}{3}\right) + e^{-\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{\nu}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^2 \right\}.$$

Supposto $\nu \geq 6$ si ha la più semplice disuguaglianza

$$|\rho^*| \leq \frac{1}{\nu\pi} \left\{ e^{-2\pi\sqrt{3}} + \frac{2}{5}\left(\frac{e^{2/3\sqrt{3}}}{6} + \frac{1}{3}\right) + e^{-(2\pi/\sqrt{3})^3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^2 \right\},$$

e dopo qualche calcolo

$$|\rho^*| \leq \frac{0{,}252}{\nu\pi}, \qquad \nu \geq 6.$$

Da una ispezione sulle tavole delle funzioni di BESSEL si verifica facilmente che questa disuguaglianza per $|\rho^*|$ vale almeno per $\nu \geq 1$.

Si ha pertanto

$$\text{(8)} \qquad \boxed{\begin{array}{l} Y_\nu(\nu) = \dfrac{-\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}} 3^{-\frac{1}{3}} \pi \nu^{\frac{1}{3}}} + \rho^*, \\[2ex] |\rho^*| \leq \dfrac{0{,}252}{\nu\pi}, \qquad \nu \geq 1 \end{array}} .$$

3. K. M. SIEGEL e F. B. SLEATOR [1] hanno stabilito recentemente che, per $x > 1$ e ν positivo, sussiste la disuguaglianza

$$\text{(9)} \qquad |Y_\nu(\nu x)| < \frac{1}{x^{1/2}}\left[\frac{0{,}964}{\nu^{1/3}} + \frac{|\cos \nu\pi|}{2\nu\pi} + e^{\varepsilon\pi}\right],$$

dove ε è la differenza fra ν e il massimo intero contenuto in ν.

Dalla (8) può dedursi una migliore disuguaglianza.

[1] K. M. SIEGEL and F. B. SLEATOR, *Inequalities involving cylindrical functions of nearly equal argument and order*, Proceed. Amer. Math. Soc., 5, 1954, pp. 336-344.

Tenuto conto che la funzione $\nu x[J_\nu^2(\nu x) + Y_\nu^2(\nu x)]$ è una funzione decrescente di x, (²) si ha

$$J_\nu^2(\nu x) + Y_\nu^2(\nu x) < \frac{1}{x}\,[J_\nu^2(\nu) + Y_\nu^2(\nu)], \tag{10}$$

e da questa

$$|\,Y_\nu(\nu x)\,| < \frac{1}{x^{1/2}}\,[\,|\,J_\nu(\nu)\,| + |\,Y_\nu(\nu)\,|\,]. \tag{11}$$

Per la disuguaglianza di CAUCHY (³)·

$$J_\nu(\nu) < \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}}\,3^{\frac{1}{6}}\,\pi\nu^{\frac{1}{3}}},$$

e per la (8) si ha allora dalla (11)

$$|\,Y_\nu(\nu x)\,| < \frac{1}{x^{1/2}}\left[\frac{1}{\pi\nu^{1/3}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{2/3}}\,(3^{-1/6} + 3^{1/3}) + \frac{0{,}252}{\nu\pi}\right],$$

cioè

$$\boxed{|\,Y_\nu(\nu x)\,| < \frac{1}{x^{1/2}}\left[\frac{3{,}841}{\pi\nu^{1/3}} + \frac{0{,}252}{\pi\nu}\right], \qquad x > 1} \tag{12}$$

Abbiamo così provato questa disuguaglianza per $\nu \geq 1$, però dalla (9) segue che essa vale anche per $0 < \nu < 1$.

Naturalmente la (12) è migliore della (9) quando ν è grande, cioè nel caso più interessante.

È ovvio che dalla (10) può dedursi con lo stesso procedimento la disuguaglianza

$$|\,J_\nu(\nu x)\,| < \frac{1}{x^{1/2}}\left[\frac{3{,}841}{\pi\nu^{1/3}} + \frac{0{,}252}{\pi\nu}\right], \qquad x > 1. \tag{13}$$

(²) W. MAGNUS and F. OBERHEITTINGER, *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics*, New York, 1954, p. 25.

(³) G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge, 1948, p. 231.