Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Ossicini

Sulla sommabilità di Cesaro delle serie di Legendre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 521–526.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_521_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Sulla sommabilità di Cesaro delle serie di Legendre.

Nota di ALESSANDRO OSSICINI (a Roma)

Sunto. - *Si dimostra un teorema sulla sommabilità di* CESARO *delle serie di* LEGENDRE, *per mezzo di quella delle serie di* FOURIER.

1. Nella presente nota dimostriamo che: *se* $f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$ *é sommabile* (nel senso di LEBESGUE) *nell'intervallo* $(-1, 1)$, *e se* λ *è un numero positivo* < 1, *allora la somma* $(C, -\lambda)$ *della serie*

$$[1.1] \qquad a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_n m^{-\lambda} P_m(x),$$

ove $P_m(x)$ *è l'* m^{esimo} *polinomio di Legendre, e*

$$[1.2] \qquad a_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx, \quad m \geq 0 \ (^1),$$

converge quasi ovunque in $(-1, 1)$.

(1) Cfr. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali,* Zanichelli, Bologna, 1952, p. 243.

2. Se prendiamo un numero s positivo < 1, e decomponiamo s nella somma di due numeri positivi μ ed ε, $\mu + \varepsilon = s$; e se d è un numero positivo,

$$o < d \leq \mu, \text{ e } \mu_x, \ \mu'_x$$

due funzioni di x definite in $(-1, 1)$ che soddisfano le limitazioni:

$$d \leq \mu_x \leq \mu; \qquad d \leq \mu'_x \leq \mu;$$

allora la serie [1.1] può porsi sotto la forma

$$[2.1] \qquad a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-\lambda} P_m(x) =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m m^{-\lambda} P_m(x) + \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m m^{-\lambda} P_m(x)$$

ove

$$[2.2] \qquad \alpha_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \left\{ \int_{-1}^{x-\mu_x} + \int_{x+\mu'_x}^{1} \right\} f(x') P_m(x') dx', \ m \geq 0,$$

$$[2.3] \qquad \beta_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \int_{x-\mu_x}^{x+\mu'_x} f(x') P_m(x') dx', \ m \geq 0.$$

3. Cominciamo coll'occuparci della sommabilità $(C, -\lambda)$ della serie

$$[3.1] \qquad \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m m^{-\lambda} P_m(x).$$

Poichè la $(C, 0)$ della serie

$$[3.2] \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m P_m(x)$$

converge uniformemente (verso zero) per

$$-1 + s \leq x \leq 1 - s \ (^2),$$

ne segue in base ad un teorema di ZYGMUND (3) che la somma $(C, -\lambda)$ della [3.1] è uniformemente convergente (4).

(2) Cfr. G. SANSONE, loc. Cit. (1), pp. 244-248.

(3) Cfr. A. ZYGMUND, Uber einige, *Sätze aus der Theorie der divergenten Reihen,* « Bulletin internazional de l'Accademie Polonaise, Cracovie 1927) pp. 309-331.

Il teorema di ZYGMUND (p. 326) afferma che: se la serie (3'), Σa_m è sommabile (c, k) e $0 < s < k+1$ allora la serie (3''), $\Sigma a_m y_m$ ove $y_m = 0(m^{-s})$ è sommabile $(c, k-s)$.

(4) Quando a_m anzichè essere delle costanti sono funzioni della x in un certo intervallo (α, β) la sommabilità $(c, k, -s)$ della (3'') diventa uniforme se in tutto (α, β) è uniforme la sommabilità (c, k) della (3').

4. Se ci riferiamo sempre ad archi compresi tra zero e π posto

$$x' = \cos\gamma'; \qquad x = \cos\gamma; \qquad 0 < \gamma < \pi,\ 0 < \gamma' < \pi,$$

$$1 - \varepsilon = \cos\rho, \qquad 1 - (\varepsilon + \mu) = 1 - s = \cos(\rho + \tau);$$

$$0 < \rho < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \tau, \qquad \rho + \tau < \frac{\pi}{2},$$

e se indichiamo con $\eta (\eta > 0)$ il minimo di $\arccos u - \arccos(u + \mu)$ per u in $(-1, 1 - \mu)$ avremo

$$\beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m m^{-\lambda} P_m(\cos\gamma) =$$

[4.1]
$$= \beta_0'(\gamma) + \sum_{m=1}^{\infty} \beta'_m(\gamma) m^{-\lambda} +$$
$$+ \frac{1}{(\operatorname{sen}\gamma)^{\frac{1}{2}}} [\beta''_0(\gamma) + \sum_{m=1}^{\infty} \beta''_m(\gamma) m^{-\lambda}]$$

con

[4.2]
$$\beta'_m(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} \left[\pi\left(m + \frac{1}{2}\right) P_m(\cos\gamma) P_m(\cos\gamma') - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos m(\gamma - \gamma')}{(\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\gamma')^{\frac{1}{2}}} \right] f(\cos\gamma') \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma',\ d\gamma' m \geq 0,$$

[4.3]
$$\beta''_m(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} \cos m(\gamma - \gamma') f(\cos\gamma') \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma' d\gamma',\ m \geq 0.$$

5. Dimostriamo ora che la somma $(C, -\lambda)$ della serie

[5.1]
$$\beta_0'(\gamma) + \sum_{m=1}^{\infty} \beta'_m(\gamma) m^{-\lambda}$$

converge uniformemente in $(\rho + \tau,\ \pi - \rho - \tau)$. È necessario a questo scopo provare che la serie:

[5.2]
$$\sum_{m=0}^{\infty} \beta'_m(\gamma)$$

è uniformemente convergente in $(\rho + \tau,\ \pi - \rho - \tau)$.

Ora

[5.3] $$\sum_{m=0}^{n} \beta'_m(\gamma) = D_n(\gamma) + E_n(\gamma)$$

con [5]

[5.4] $$\lim_{n \to \infty} D_n(\gamma) = 0$$

uniformemente rispetto a γ in $(\rho + \tau,\ \pi - \rho - \tau)$ mentre

[5.5] $$E_n(\gamma) = U_n(\gamma) + V_n(\gamma)$$

ove

[5.6] $$U_n(\gamma) = \frac{1}{(\operatorname{sen}\gamma)^{\frac{1}{2}}} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} \left[\frac{2}{\pi^2} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)a_n a_{n+1}} \frac{\operatorname{sen}(n+1)(\gamma-\gamma')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\gamma-\gamma')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')} \right] f(\cos\gamma') \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma' d\gamma'$$

con

$$a_n = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

e

[5.7] $$V_n(\gamma) = -\frac{1}{2\pi(\operatorname{sen}\gamma)^{\frac{1}{2}}} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} f(\cos\gamma') \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma' d\gamma'.$$

Dato che

$$a_n = \sqrt{2}/\sqrt{\pi(2k+\Theta)}, \qquad 0 < \Theta < 1 \ [6],$$

ne segue

$$\frac{2}{\pi^2} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2\pi}\left[1 + O\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

e quindi

[5.8] $$U_n(\gamma) = U_n'(\gamma) + U_n''(\gamma)$$

con

$$U_n'(\gamma) = \frac{1}{2\pi\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} \frac{\operatorname{sen}(n+1)(\gamma-\gamma') - \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\gamma-\gamma')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')} f(\cos\gamma')\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma' d\gamma'$$

(5) Cfr. G. Sansone, loc. cit. (1) p.p. 252-257.

(6) Cfr. G. Sansone, loc. cit. (1) p. 220.

$$U_n''(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\, O\left(\frac{1}{n+1}\right) \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} \frac{\operatorname{sen}(n+1)(\gamma-\gamma')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')} f(\cos\gamma')\, \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma' d\gamma'$$

ed inoltre (7)

$$\lim_{n\to\infty} U'_n(\gamma) = 0$$

uniformemente per γ in $(\rho+\tau,\ \pi-\rho-\tau)$; resta quindi da considerare il limite per $n\to\infty$ di $U_n''(\gamma)$.

Avendosi

$$|(\gamma'-\gamma)/2| \leq \frac{\eta}{2} < \frac{\pi}{2}$$

si ha

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\operatorname{sen}(n+1)(\gamma-\gamma')}{(n+1)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}(n+1)(\gamma-\gamma')}{(n+1)(\gamma-\gamma')}\ \frac{(\gamma-\gamma')/2}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\gamma-\gamma')}\right| < \frac{\pi}{2}$$

e quindi qualunque sia il numero positivo $\omega < \eta$ si ha

$$|U_n''(\gamma)| < \frac{1}{2}\frac{O(1)}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\rho} \int_{\gamma-\omega}^{\gamma+\omega} |f(\cos\gamma')\, \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma'|\, d\gamma' +$$

$$+\ O\left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{2\pi \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\rho\, \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \left\{\int_{\gamma-\eta}^{\gamma-\omega} + \int_{\gamma+\omega}^{\gamma+\eta}\right\} |f(\cos\gamma')\, \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma'|\, d\gamma'$$

e per la sommabilità di $f(\cos\gamma')\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma'$ in $(\rho,\ \pi-\rho)$ segue $\lim_{n\to\infty} U_n''(\gamma) = 0$, uniformemente per γ in $(\rho+\tau,\ \pi-\rho-\tau)$.

Resta quindi dimostrato che la somma $(C, 0)$ della serie [5.2] converge uniformemente verso la funzione $V_n(\gamma)$, assolutamente continua, per γ in $(\rho+\tau,\ \pi-\rho-\tau)$ (8).

In base infine al citato teorema di ZYGMUND (3) la $(C, -\lambda)$ della serie (5.1) converge uniformemente per γ variabile in $(\rho+\tau,\ \pi-\rho-\tau)$.

(7) Cfr. E. W. HOBSON: *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics* (Cambridge 1931), p. 325.

(8) Cfr. G. VITALI - G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*. Parte prima (Zanichelli 1951) p. 107.

6. Da quando detto nei numeri precedenti segue che appartenendo γ all'intervallo $(\rho+\tau,\ \pi-\rho-\tau)$ la sommabilità $(C,\ -\lambda)$ della (1.1) è legata alla sommabilità $(C,\ -\lambda)$ della serie

$$[6.1) \qquad \beta_0''(\gamma)+\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m''(\gamma)m^{-\lambda}$$

con

$$[4.3] \qquad \beta_m''(\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\cos m(\gamma-\gamma'\ f(\cos\gamma')\ \mathrm{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma' d\gamma',\ m\geq 0.$$

Possiamo ora osservare che se si pone per γ in $(\rho+\tau,\ \pi-\rho-\tau)$

$$F(\gamma')=f(\cos\gamma')\ \mathrm{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma' \quad \text{per} \quad \gamma-\eta\leq\gamma'\leq\gamma+\eta \quad (0<\eta\leq\tau),$$

$$F(\gamma')=0 \quad \text{per} \quad -\pi<\gamma'<\gamma-\eta \quad \text{oppure} \quad \gamma+\eta<\gamma'<\pi,$$

la [6.1] diviene

$$[6.2] \qquad a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\gamma+b_m\ \mathrm{sen}\ m\gamma)m^{-\lambda}$$

con

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\gamma')d\gamma'$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\gamma')\cos m\gamma' d\gamma' \qquad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\gamma')\,\mathrm{sen}\,m\gamma' d\gamma' \quad (m=1,\ 2,\ 3\ \ldots).$$

La [6.2] è quindi una serie, della funzione $F(\gamma')$ sommabile in $(-\pi,\ \pi)$, associata alla serie di FOURIER; e detta serie, come ha dimostrato SHIGEKI YANO (9) è sommabile $(C,\ -\lambda)$ quasi ovunque.

La [4.1] sarà quindi sommabile in ogni punto interno all'intervallo $(0,\ \pi)$ eccetto che in un insieme di misura nulla; e per quello che abbiamo detto al n. 3, la $(C,\ -\lambda)$ della [1, 1] converge quasi ovunque in $(-1,\ 1)$.

(9) Cfr. SHIGEKI YANO, *Cesaro Summability of Fourier series*, «Pacific Journal of Mathematics», vol. II, n. 3, Settembre 1952, pp. 419-424.