Bollettino
Unione Matematica Italiana

Gianfranco Panella

# Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **10** (1955), n.4, p. 507–513.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_507_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

# Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito.

Nota di GIANFRANCO PANELLA (a Roma) (*)

**Sunto.** - *Come al n. 3.*

Un insieme di punti di uno spazio (a tre dimensioni) lineare sopra un corpo finito $\gamma$, di caratteristica $p$ diverso da due, è, per definizione, un insieme $Q$ se sono verificati i seguenti assiomi:

*a*) nell'insieme esiste un punto $P$, da dirsi centro dell'insieme, tale che la retta generica per esso ha con l'insieme uno e un solo punto comune distinto da $P$;

*b*) fanno eccezione alla *a*) le rette per $P$ appartenenti a un piano, da dirsi piano tangente in $P$ all'insieme;

*c*) se tre punti dell'insieme sono allineati ogni punto della retta che li contiene appartiene all'insieme.

La *a*) e la *b*) implicano [1] che un insieme $Q$ ha un numero di punti maggiore o uguale a $q^2+1$ [2].

(*) N. d. R. Entrata in Redazione il 27-6-55.

I risultati di questa nota coincidono in parte con quelli ottenuti per via leggermente diversa dal dott. A. BARLOTTI, nella Nota pubblicata in questo stesso numero. I due lavori sono stati eseguiti in modo del tutto indipendente.

(1) Per la definizione di spazio lineare sopra un corpo (e relative proprietà) si rimanda all'opera di B. SEGRE: *Lezioni di Geometria moderna*, vol. I, Zanichelli, Bologna, (1948).

Mi limito a ricordare che uno spazio tridimensionale lineare sopra un corpo finito è costituito, se in $\gamma$ vi sono $q=p^h$ elementi, da $q^3+q^2+q+1$ punti (piani) e che da un punto dello spazio escono $q^2+q+1$ rette. In un tale spazio valgono i postulati di appartenenza e il principio di dualità; ogni retta possiede $q+1$ punti e ogni piano $q^2+q+1$ rette.

(2) Per le proprietà dei $(q+1)$-archi e delle quadriche, alle quali si farà ricorso nel seguito, si possono consultare rispettivamente i seguenti lavori: B. SEGRE: *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (VIII), vol. XVII, fasc. 5, (1954). G. APRILE: *La geometria proiettiva in un corpo numerico finito*, Atti Acc. Leonardo da Vinci, (1934-35).

**1.** Un insieme $Q$ si dice *non rigato* se nell'insieme non vi sono terne di punti allineati (le quadriche non rigate provano l'esistenza di tali insiemi $Q$); per un insieme $Q$ non rigato valgono le seguenti proposizioni:

I. *Il piano tangente nel centro a un insieme* Q *non rigato non contiene punti dell'insieme distinti dal centro.*

Infatti, detto $S$ un punto del piano tangente nel centro $P$ a un insieme $Q$ non rigato, si consideri un piano per la retta $PS$; esso ha $q$ punti, non appartenenti alla $PS$, in comune con l'insieme $Q$, i quali, con il punto $P$, costituiscono un $(q+1)$-arco $K$; poichè per $S$ vi sono delle secanti a $K$ il punto $S$ non può appartenere all'insieme $Q$ non rigato.

Da ciò segue che un insieme $Q$ non rigato ha esattamente $q^2+1$ punti e, quindi, vi sono $q+1$ rette per ogni suo punto $R$ che non incontrano l'insieme $Q$ in punti distinti da $R$. È immediato che:

II. – *Un piano che abbia due punti comuni con un insieme* Q *non rigato interseca l'insieme in un* (q + 1)*-arco.*

Si considerino, infatti, i $q+1$ piani per due punti di un insieme $Q$ non rigato: ciascuno di essi ha altri $q-1$ punti a comune con l'insieme poichè non esistono dei $(q+2)$-archi.

Vale, inoltre, la proprietà:

III. – *Le* q + 1 *rette uscenti da un punto* R *di un insieme* Q *non rigato e non intersecanti ulteriormente l'insieme riempiono un piano.*

Siano, infatti, $r$ e $s$ due di tali rette e sia $\alpha$ il piano da esse individuato: se $\alpha$ avesse un punto in comune con l'insieme $Q$ non rigato, oltre al punto $R$, intersecherebbe l'insieme in un $(q+1)$-arco $K$ e le rette $r$ e $s$ sarebbero tangenti a $K$ in $R$. Poichè ciò è in contrasto con le proprietà di un $(q+1)$-arco le $q+1$ rette per $R$ non intersecanti ulteriormente l'insieme $Q$ non rigato coincidono con le rette per $R$ appartenenti al piano $\alpha$.

La III svincola l'insieme $Q$ non rigato dalla nozione di centro poichè, come corollario di essa, si riconosce che qualsiasi punto di un insieme $Q$ non rigato gode di proprietà analoghe a quelle del centro; in particolare si può definire in ogni punto $R$ di un insieme $Q$ non rigato un piano tangente assumendo come tale il piano per $R$ non intersecante ulteriormente l'insieme.

Proseguendo nella discussione è opportuno stabilire la proposizione seguente:

IV. *Se un punto* T *è contenuto in un piano tangente a un insieme* Q *non rigato e non appartiene all'insieme, allora per* *il punto vi sono* q + 1 *piani tangenti a* Q *e essi inviluppano un cono quadrico; i punti di contatto di questi piani con l'insieme* Q *non rigato appartengono a un piano e, quindi, costituiscono un* (q + 1)*-arco.*

Il piano $\alpha$ per $T$ sia, per ipotesi, tangente in un punto $S$ a un insieme $Q$ non rigato; un piano per la retta $TS$, distinto dal piano $\alpha$, ha in comune con l'insieme $Q$ un $(q+1)$-arco rispetto al quale il punto $T$ risulta esterno e, quindi, esiste una retta per $T$ (distinta dalla $TS$) la quale è tangente al $(q+1)$-arco in un certo punto $M$: il piano tangente in $M$ all'insieme $Q$ non rigato passa per $T$. Esistono, cioè, $q+1$ piani per $T$ tangenti all'insieme $Q$ non rigato; se si considera il cono che da $T$ proietta i punti di contatto di questi piani con l'insieme $Q$, tenendo presente che un piano generico interseca il cono in un $(q+1)$-arco ([3]), si stabilisce la prima parte dell'enunciato.

Si indichi, quindi, con $C$ il cono quadrico inviluppato dai piani passanti per $T$ e tangenti all'insieme $Q$ non rigato e con $P_1$, $P_2$, $P_3$ tre punti comuni all'insieme $Q$ e al cono $C$; sia, inoltre, $\beta$ il piano per i tre punti considerati e $A$ il punto comune a $\beta$ e a una generica generatrice di $C$. Se $A$ non appartenesse all'insieme $Q$, proiettando da $T$ il $(q+1)$-arco comune a $\beta$ e all'insieme $Q$ si otterrebbe un cono quadrico distinto da $C$: ma ciò è assurdo poichè i due coni hanno lo stesso vertice, tre generatrici comuni e sono tangenti lungo ciascuna di queste generatrici a un medesimo piano.

La proposizione IV è invertibile: se si considera un $(q+1)$-arco $K$ di un insieme $Q$ non rigato i piani tangenti all'insieme nei punti di $K$ passano per un punto ([4]). Premesso ciò è opportuno porre in evidenza che:

V. *Un insieme* Q *non rigato è individuato univocamente non appena siano noti un suo* $(q+1)$*-arco* K, *il cono quadrico inviluppato dai piani tangenti all'insieme nei punti di* K *e un ulteriore punto dell'insieme.*

Detto $T$ il vertice del cono $C$ inviluppato dai piani tangenti all'insieme $Q$ non rigato nei punti di $K$ e $P$ un punto dell'insieme

([3]) Il quale, per un teorema di B. SEGRE, è una conica (per la bibliografia si confronti la nota ([2])).

([4]) Per provarlo si considerino tre di quei piani tangenti e il cono che proietta dal loro punto comune (e i tre piani non appartengono a un fascio) il $(q+1)$-arco $K$: questo cono, per la IV, è inviluppo dei piani tangenti all'insieme $Q$ nei punti di $K$.

non su $K$, si consideri una retta $r$ per $P$, il piano $\alpha$ individuato da $r$ e da una secante a $K$ e siano $P_1$ e $P_2$ i punti di $K$ appartetenenti alla secante; $\alpha$ interseca l'insieme $Q$ in un $(q+1)$-arco $H$ il quale contiene il punto $P$, i punti $P_1$ e $P_2$ e è tangente in $P_1$ $(P_2)$ alla retta comune a $\alpha$ e al piano tangente in $P_1$ $(P_2)$ al cono $C$. Quindi $H$ è univocamente individuato, dovendo, per il teorema di B. SEGRE già citato, coincidere con la conica determinata dalle condizioni poste in evidenza. Se la retta $r$ è tangente a $H$ essa appartiene al piano tangente in $P$ all'insieme $Q$ non rigato; in caso contrario è individuato e unico il punto dell'insieme (distinto da $P$) appartenente alla retta $r$.

Le proposizioni precedenti permettono di stabilire il seguente risultato:

VI. *Ogni insieme* Q *non rigato è una quadrica a punti ellittici e viceversa.*

La verifica che una quadrica a punti ellittici sia un insieme $Q$ non rigato è immediata. Considerato un insieme $Q$ non rigato si prendano in esame un suo $(q+1)$-arco $K$, il cono quadrico inviluppato dai piani tangenti all'insieme nei punti di $K$ e un altro punto $P$ dell'insieme.

Per la V gli elementi considerati individuano univocamente l'insieme $Q$ non rigato e, inoltre, individuano univocamente una quadrica: per provare l'enunciato occorre stabilire che la quadrica è a punti ellittici (5).

Infatti, se la quadrica in questione fosse rigata, si potrebbero considerare $q+1$ sue rette sghembe a due a due uscenti ciascuna da un punto di $K$ (6): sarebbero così individuati i $(q+1)^2$ punti della quadrica e $P$ non sarebbe compreso tra essi non appartenendo a nessuno dei piani tangenti all'insieme $Q$ non rigato nei punti di $K$.

Premessa la VI, si prova abbastanza facilmente che:

VII. *Condizione necessaria e sufficiente perchè* $q^2+1$ *punti di uno spazio lineare* (*tridimensionale*) *sopra un corpo finito di caratteristica diversa da due siano tutti* (*e soli*) *i punti di una quadrica non rigata è che tre qualunque di essi non siano allineati.*

Per un tale insieme di punti, infatti, si prova, con dimostrazione analoga a quella della proposizione II, che un piano che

(5) Si noti che la quadrica non può essere specializzata.

(6) E una di tali rette $r$ uscente dal punto $P_1$ di $K$ apparterrebbe al piano tangente in $P_1$ all'insieme $Q$ non rigato.

abbia con esso in comune due punti l'interseca in un $(q+1)$-arco; da ciò segue (come nella III) che in ogni punto si può definire un piano tangente all'insieme e, quindi, detto $P$ uno dei $q^2+1$ punti l'insieme considerato è un insieme $Q$ non rigato di centro $P$.

VIII. *In uno spazio lineare (tridimensionale) sopra un corpo finito di caratteristica diversa da due non esistono* $q^2+2$ *punti tre qualunque dei quali non siano allineati.*

Considerati, infatti, $q^2+1$ dei punti in questione, essi, se tre qualunque non sono allineati, costituiscono un insieme $Q$ non rigato; il piano per il punto residuo e per due punti prefissati dell'insieme $Q$ interseca questo in un $(q+1)$-arco; la proposizione enunciata discende dal fatto che non esistono $(q+2)$-archi.

Inoltre vale la proposizione:

IX. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme di punti di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito di caratteristica diversa da due sia costituito da tutti e soli i punti di una quadrica non rigata è che un piano che abbia due punti a comune con l'insieme lo intersechi in un* $(q+1)$*-arco.*

Per provare che la condizione è sufficiente si osservi che un tale insieme di punti è costituito da $q^2+1$ punti (e ciò si verifica considerando i piani per due punti dell'insieme) tre qualunque dei quali non sono allineati.

**2.** Un insieme $Q$ si dice *rigato* se contiene una terna di punti allineati (e l'esistenza di insiemi $Q$ rigati sarà provata nel seguito); per un tale insieme valgono le seguenti proprietà:

X. *Un insieme* $Q$ *rigato contiene* $q$ *rette incidenti ad una medesima retta per* $P$*, giacente nel piano tangente a* $Q$ *in* $P$.

Infatti, per la $c$), la retta che contiene i tre punti dell'insieme che sono allineati è totalmente contenuta nell'insieme e, quindi, esiste un punto $M$ dell'insieme che appartiene al piano tangente a esso nel centro $P$. Un piano per la retta $PM$, distinto dal piano tangente nel centro, interseca l'insieme $Q$ rigato in $q$ punti non situati sulla $PM$ che, se non appartenessero a una retta, individuerebbero con $M$ un $(q+1)$-arco $K$: per $P$ vi sarebbero delle rette secanti $K$ il che è in contrasto con la $a$).

XI. *Le* $q$ *rette (di cui in* X*) appartenenti a un insieme* $Q$ *rigato e incidenti ad una medesima retta per il centro* $P$*, giacente nel piano tangente a* $Q$ *in* $P$*, o passano tutte per uno stesso punto* $M$ *di tale retta, oppure sono sghembe a due a due.*

Si tratta di provare che se due di quelle rette passano per il punto $M$ una ulteriore di esse non può incontrare la $PM$ in un punto $C$ distinto da $M$. Infatti, se così non fosse, dette $m$ e $n$ due rette (dell'insieme) per $M$ e $t$ una retta (dell'insieme) per $C$, si osservi che il piano per $m$ e $n$ incide la retta $t$ in un punto $F$ non contenuto nè in $m$ nè in $n$: in caso contrario il piano per i punti $C$, $M$ e $F$ conterrebbe due rette dell'insieme e il punto $P$ il che è in contrasto con la $a$); ma allora ogni punto del piano per $m$ e $n$ dovrebbe appartenere all'insieme $Q$ rigato e si sarebbe nuovamente in contrasto con la definizione.

La XI permette di affermare che gli insiemi $Q$ rigati sono dei seguenti tre tipi:

1) – *Insiemi* Q (*propriamente*) *rigati*: contengono $q$ rette che si appoggiano a una retta per $P$ e risultano a due a due sghembe;

2) – *Insiemi* Q *specializzati*: contengono $q$ rette che passano per un punto $V$ del piano tangente in $P$ all'insieme, le $q$ rette risultando a tre a tre non complanari;

3) – *Insiemi* Q *degeneri*: contengono $q$ rette appartenenti a un piano e, quindi, tutte le rette del piano.

Nel seguito si diranno insiemi $Q$ rigati solamente gli insiemi $Q$ (propriamente) rigati.

Valgono le proposizioni:

XII. *Un insieme* Q *specializzato è contenuto in un cono quadrico di vertice* V.

Infatti, un piano per $P$, ma non per $V$, ha in comune $q$ punti con le $q$ rette dell'insieme, i quali, con il punto $P$, costituiscono un $(q+1)$–arco; il luogo delle rette che da $V$ proiettano il $(q+1)$–arco contiene l'insieme $Q$ (potendo anche coincidere con esso).

XIII. *Ogni insieme* Q *degenere è contenuto in una quadrica spezzata in due piani distinti.*

Basta considerare la quadrica spezzata nel piano delle $q$ rette dell'insieme e in un piano per $P$; se sul piano tangente in $P$ all'insieme non sono contenuti punti dell'insieme distinti dai punti di esso appartenenti al piano delle $q$ rette, la scelta del piano per $P$ è arbitraria.

XIV. *Ogni insieme* Q *rigato è una quadrica rigata e viceversa.*

Infatti dalla $a$) e dalla 1) segue che un insieme $Q$ rigato coincide con l'insieme delle rette che si appoggiano a tre rette sghembe.

Come corollario della XIV si ottiene che ogni insieme $Q$ rigato contiene $(q+1)^2$ punti e $2(q+1)$ rette che si distribuiscono in due schiere contenenti lo stesso numero di rette in modo tale che per ogni punto dell'insieme escano due di tali rette (una per ogni schiera). Definito, quindi, in ogni punto il piano tangente all'insieme come il piano delle due rette dell'insieme uscenti dal punto si svincola la nozione di insieme $Q$ rigato dal concetto di centro.

**3.** Riassumendo i risultati ottenuti si può affermare che:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme di punti di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito di caratteristica diversa da due sia costituito da tutti e soli i punti di una quadrica (non specializzata) rigata o no è che l'insieme di punti sia un insieme* Q *propriamente rigato o non rigato.*