Bollettino
Unione Matematica Italiana

Heinrich Guggenheimer

Sulla teoria globale delle trasformazioni puntuali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 474–477.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_474_0>

Sulla teoria globale delle trasformazioni puntuali.

Nota di Heinrich Guggenheimer (a Gerusalemme)

Sunto. - *Come il primo paragrafo.*

1. La teoria delle trasformazioni puntuali ha avuto in questi ultimi anni notevoli sviluppi, soprattutto in seguito ai lavori della Scuola di Bologna. Ci proponiamo qui di porre le basi per uno studio globale limitandoci soltanto alle trasformazioni continue. Le definizioni verranno enunciate in modo tale da permettere naturalmente l'introduzione di condizioni di regolarità, differenziabilità, ecc..

Per analogia con la terminologia della geometria algebrica chiamiamo *corrispondenza continua* $T(\alpha_1, \alpha_2)$ fra due spazi topologici X, Y una applicazione di X *sopra* Y tale che

1) Esistono spazi subordinati $A \subset X$, $B \subset Y$ tali che ad un $x \in X - A$ corrisponda un numero finito fisso α_1 di punti $y \in Y - B$, e che l'immagine reciproca di ogni punto $y \in Y - B$ sia composta di α_2 punti $\in X - A$.

2) Le restrizioni di T sopra $X - A$, e di T^{-1} sopra $Y - B$ sono delle applicazioni *continue.*

3) Se le dimensioni (oppure dimensioni omologiche) di X e Y sono finite, $\dim A < \dim X$; $\dim B < \dim Y$.

Il caso delle trasformazioni puntuali è quello delle corrispondenze (1,1) differenziabili fra spazi proiettivi della stessa dimensione.

Prima di trattare tale caso, osserviamo che non ha senso il voler studiare classi di spazi equivalenti per corrispondenze continue. In particolare è facile vedere che ogni pseudo-varietà a due dimensioni è in corrispondenza con la sfera. In questo esempio si passa alle superficie non orientabili per mezzo della proiezione stereografica (eventualmente limitata a calotte di sfere) e si ottengono numeri di Betti elevati mediante tagli della sfera secondo l'equatore seguiti da ricongiungimento dopo identificazioni. Le sezioni e i punti che vengono mutati in rette proiettive costituiscono ora lo spazio subordinato A, a una dimensione.

2. Sia ora T (1,1) una corrispondenza continua fra due spazi proiettivi complessi di dimensione reale $2n$.

Utilizzeremo l'omologia singolare con coefficienti nel gruppo R dei numeri reali oppure nel gruppo Z degli interi.

La trasformazione T è un omeomorfismo di $X - A$ sopra $Y - B$. In base alla definizione dei gruppi di omologia singolare

$$H_i(X,\ A) \cong H_i(X - A)$$

avremo

$$H_i(X - A) \cong H_i(Y - B). \tag{1}$$

Le corrispondenze considerate saranno d'ora in poi di tipo ristretto, definito dalla condizione

4) Tutti i gruppi $H_i(A\,;\ R)$, $H_i(B\,;\ R)$ sono di rango finito.

Si ricava allora dalla successione esatta di omologia che

$$\operatorname{rang}\,(H_i(X - A)) < \infty \qquad (i = 0,\ 1, \ldots)$$

quando tutti i ranghi $(H_i(X)) < \infty$.

In virtù della (1) e delle

$$H_{2i}(P_n) \cong R, \quad H_{2i+1}(P_n) = 0$$

si ricava dalle successioni esatte

$$\leftarrow H_{i-1}(A\,;\ R) \leftarrow H_{i-1}(P_n\,;\ R) \leftarrow H_{i-1}(P_n,\ A\,;\ R) \leftarrow H_i(A\,;\ R) \leftarrow$$

$$\leftarrow H_{i-1}(B\,;\ R) \leftarrow H_{i-1}(P_n\,;\ R) \leftarrow H_{i-1}(P_n,\ B\,;\ R) \leftarrow H_i(B\,;\ R) \leftarrow$$

l'uguaglianza delle differenze fra i numeri di Betti *degli spazi singolari :*

$$p_{2i}(A) - p_{2i-1}(A) = p_{2i}(B) - p_{2i-1}(B). \tag{2}$$

Se si passa poi alle successioni esatte costruite con Z, si ha la scomposizione canonica

$$H_i(X\,;\ Z) \cong H_i(X\,;\ R) + T_i(X)$$

dalla quale si ricava *l'isomorfismo dei gruppi di torsione :*

$$T_i(A) = T_i(B). \tag{3}$$

Osservazione. – Se X è una varietà, esistono sempre delle corrispondenze (1,1)

$$T(1,1): X \to X$$

tali che A e B siano composti di $\chi(X)$ punti distinti.

3. Per le corrispondenze (1,1) fra due spazi proiettivi reali di dimensione m, si ottengono i risultati con lo stesso metodo. Se si indica con ${}_k r_i(X)$ il rango del gruppo d'ordine k contenuto in $T_i(X)$, si ottiene

$$(4) \qquad \begin{aligned} &p_i(A) = p_i(B)\,; \quad {}_k r_i(A) = {}_k r_i(B) \quad (k \neq 2) \\ &{}_2 r_{2i+1}(A) - {}_2 r_{2i}(A) = {}_2 r_{2i+1}(B) - {}_2 r_{2i}(B) \end{aligned}$$

in virtù di $H_{2i+1}(P^m) \cong Z_2$.

I risultati (2), (3), (4) mostrano che gli insiemi singolari di T e di T^{-1} non differiscono molto nella loro struttura omologica. In particolare *i gruppi* $\mathrm{H_i(A\,;\,Z)}$ *e* $\mathrm{H_i(B\,;\,Z)}$ *sono isomorfi nelle corrispondenze* (1,1) *fra piani proiettivi reali o fra rette proiettive complesse.*

4. Si potranno considerare anche delle corrispondenze fra due spazi di struttura diversa, sempre servendosi della relazione fondamentale (1). In tal modo si ottengono per una corrispondenza fra una sfera S^2 e un piano proiettivo P^2 le successioni

$$0 \leftarrow \tilde{H}_0(A) \leftarrow H_1(P^2, A) \leftarrow Z_2 \leftarrow H_1(A) \leftarrow H_2(P^2, A) \leftarrow 0$$

$$0 \leftarrow \tilde{H}_0(B) \leftarrow H_1(S^2, B) \leftarrow 0 \leftarrow H_1(B) \leftarrow H_2(S^2, B) \leftarrow Z \leftarrow 0$$

dalle quali si ricava

$$p_1(A) = p_1(B) + 1$$
$$p_0(A) = p_0(B)$$

relazioni che sono verificate nella proiezione stereografica. Non esiste torsione ad una dimensione in A e B.

Nel caso generale, si ottiene una relazione fra le caratteristiche di Eulero degli spazi X, Y, A, B. Dalla successione

$$\begin{tikzcd} H(X, A\,;\,R) & & H(X\,;\,R) \arrow[ll] \\ & H(A\,;\,R) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

si ricava

$$\chi(A) - \chi(X) + \chi(X, A) = 0$$

e poichè dalla (1) si ha

$$\chi(X, A) = \chi(Y, B),$$

risulta

$$\chi(X) - \chi(A) = \chi(Y) - \chi(B). \tag{5}$$

Questa formula contiene un risultato di B. SEGRE ([1]) di cui si riconosce qui la validità per tutti i valori di $\dim A$ (che in ([1]) è indicata con p). Dalla successione esatta sopra Z si ottengono informazioni sui gruppi di torsione di B, dati quelli di A, X, Y.

5. Chiamiamo *corrispondenza forte* una corrispondenza (1,1) fra due spazi X, Y che soddisfa alla condizione più forte

2') T e T^{-1} sono delle applicazioni continue.

In questo caso non soltanto vale la (1) ma anche ([2])

$$\pi_i(X, A, p) \cong \pi_i(Y, B, q)$$

e, mediante la successione esatta di omotopia, si ottengono informazioni su $\pi_i(A)$ e $\pi_i(B)$. In particolare, per una corrispondenza forte fra sfere

$$T(1,1): S^q \rightarrow S^q$$

si ottiene non solo

$$H_i(A) \cong H_i(B)$$

ma anche

$$\pi_i(A) \cong \pi_i(B) \qquad i \leq q - 2.$$

Rimane però da vedere in quale misura si possa assegnare A ad arbitrio senza ricadere in una corrispondenza banale.

([1]) B. SEGRE, *Dilatazioni e varietà canoniche sulle varietà algebriche*, Annali di Mat. (IV) 37, 1954, pp. 139-155, ultima formula.

([2]) P. J. HILTON, *An introduction to Homotopy Theory*, Cambridge 1953, Teorema 4.13.