BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICO MAGENES

Osservazioni su alcuni teoremi di completezza connessi con i problemi misti per le equazioni lineari ellittiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.4, p. 452–459.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_4_452_0>

Osservazioni su alcuni teoremi di completezza connessi con i problemi misti per le equazioni lineari ellittiche.

Nota di ENRICO MAGENES (a Modena)

Sunto. - *Vedere la introduzione.*

Nello studio dei problemi al contorno di tipo misto per le equazioni lineari omogenee ellittiche del secondo ordine

$$
(1) \qquad E(u) \equiv \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h}^{1,m} b_k \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = 0
$$

ha interesse stabilire la completezza hilbertiana e lagrangiana di certi sistemi di funzioni. Ad essi è dedicata la presente breve nota.

L' equazione (1) sia data in un campo A dello spazio a m dimensioni, i coefficienti a_{hk}, b_h, c essendo ivi soggetti ad abituali condizioni di regolarità, ad es. a_{hk} di classe $2H$, b_h di classe $1H$ e c hölderiano [1]. Sia poi $\mathfrak{D}$ un dominio regolare limitato interno ad A; dividiamo la frontiera $\mathfrak{F}$ di $\mathfrak{D}$ in due porzioni $\overline{\mathfrak{F}}_1$ ed $\mathfrak{F}_2$ disgiunte opportunamente regolari e indichiamo con $\{ w(P) \}$ l'insieme delle soluzioni di (1) regolari in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}$ e di classe 1 in tutto $\mathfrak{D}$ e soddisfacenti alla condizione al contorno

$$\frac{dw}{d\nu} = 0 \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}_2 \tag{2}$$

dove ν indica la direzione « conormale » interna relativa all'operatore $E(u)$.

Si pone la questione di studiare, in ipotesi di unicità per il problema misto, consistente nell' assegnare su $\overline{\mathfrak{F}}_1$ la soluzione di (1) e su $\mathfrak{F}_2$ la sua derivata « conormale », la completezza « hilbertiana » o « lagrangiana » [2] sulla parte $\overline{\mathfrak{F}}_1$ del sistema $\{ w \}$.

La presente nota ha appunto per scopo di far conoscere alcune brevi considerazioni che permettono di dimostrare la completezza hilbertiana per m qualunque e lagrangiana solo nel caso $m = 2$ del sistema suddetto [3].

È bene aggiungere però che contemporaneamente, nel corso dei suoi recenti studi sui problemi misti, G. FICHERA è riuscito a

[1] Una funzione è di classe r (rH) in un insieme se è ivi continua con le sue derivate d'ordine $\leq r$ (hölderiana con le sue derivate d'ordine $\leq r$).

[2] Intendiamo con ciò che il sistema delle funzioni $\{ w \}$ definite su $\overline{\mathfrak{F}}_1$ è completo nello spazio lineare normale delle funzioni reali rispettivamente di quadrato sommabile su $\overline{\mathfrak{F}}_1$ $\left(\text{la norma essendo definita da } \| \varphi \| = \left\{ \int_{\overline{\mathfrak{F}}_1} \varphi^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}}\right)$ o continue su $\overline{\mathfrak{F}}_1$ (la norma essendo definita da $\| \varphi \| = \max_{P \in \overline{\mathfrak{F}}_1} | \varphi(P) |$).

[3] Con ciò resta dimostrata l'affermazione da me fatta nel sunto pubblicato sui *Proceedings of the International Math. Congress of Amsterdam,* 1954 (vol. II: pp. 137-138), circa la completezza hilbertiana del sistema $\{ w \}$.

dimostrare addirittura la completezza lagrangiana del sistema $\{w\}$ in un qualsiasi numero m di dimensioni ([4]).

Tuttavia il procedimento seguito nella presente nota non mi sembra privo di interesse anche per le possibili applicazioni ad altri problemi non ancora trattati per altra via ([5]).

1. Consideriamo dapprima il caso $m = 2$. Supponiamo, per fissare le idee, che il dominio $\mathfrak{D}$ sia limitato da una curva $\mathfrak{F}$ semplice chiusa di classe 2 in ogni suo punto; e sia

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{array} \right. \qquad a_1 \leq t \leq a_2 \tag{3}$$

una rappresentazione parametrica regolare di $\mathfrak{F}$. Mediante i punti $Q_1 \equiv [x_1(t_1),\ x_2(t_2)]$ e $Q_2 \equiv [x_1(t_2),\ x_2(t_2)]$ $(a_1 < t_1 < t_2 < a_2)$ dividiamo $\mathfrak{F}$ in due sotto archi aperti e privi di estremi $\mathfrak{F}_1$ ed $\mathfrak{F}_2$, e $\mathfrak{F}_1$ si ottenga dalle (3) per $t_1 < t < t_2$. Con $\overline{\mathfrak{F}}_1$ ed $\overline{\mathfrak{F}}_2$ indichiamo poi rispettivamente le chiusure di $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$

Sia poi $\mathfrak{D}'$ un dominio regolare limitato interno ad A contenente $\mathfrak{D}$ e la cui frontiera $\mathfrak{F}'$ abbia in comune con $\mathfrak{F}$ solo l'arco $\overline{\mathfrak{F}}_2$.

Dalla teoria del problema di NEUMANN si ha che esiste una funzione $N(Q,\ P)$ tale che:

1) fissato P in $\mathfrak{D}' - \mathfrak{F}'$ è come funzione di Q soluzione regolare in $\mathfrak{D}' - \mathfrak{F}' - P$ della (1) e di classe 1 in $\mathfrak{D}' - P$ e soddisfa alla

$$\frac{d}{d\nu} N(Q,\ P) = 0 \qquad Q \in \mathfrak{F}_2$$

2) fissato Q in $\mathfrak{D}' - \mathfrak{F}'$ è come funzione di P soluzione regolare dell'equazione aggiunta di (1) $E^*(v) = 0$ in $\mathfrak{D}' - \mathfrak{F}' - Q$ e di classe 1 in $\mathfrak{D}' - Q$ e soddisfa alla

$$\frac{d}{d\nu_P} N(Q,\ P) - b(P) N(Q,\ P) = 0 \qquad P \in \mathfrak{F}_2 \ ([6])$$

([4]) Si veda G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari* (in corso di stampa sugli Atti del Convegno internazionale sulle equazioni lineari alle derivate parziali, Trieste, agosto 1954).

([5]) Si veda ad es. la nota di S. CAMPANATO, *Teoremi di completezza relativi al sistema di equazioni dell'equilibrio elastico* (in corso di stampa sui Rend. Sem. Mat. di Padova).

([6]) La funzioue $b(P)$ risulta definita su $\mathfrak{F}$

$$b = \sum_{h=1}^{2} \left(b_h - \sum_{h=1}^{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k} \right) \cos (x_h,\ n)$$

essendo n la normale interna a $\mathfrak{F}$.

3) al variare di P e Q in $\mathfrak{D}'$ risulta

$$N(Q, P) = F(Q, P) + N_0(Q, P) \tag{4}$$

dove $F(Q, P)$ è una soluzione fondamentale della (1) e $N_0(Q, P)$ è limitata [7].

Per dimostrare la completezza « la rangiana » del sistema $\{w\}$ *su* $\overline{\mathfrak{F}}_1$ *basterà dunque dimostrare, per un classico teorema di analisi funzionale lineare, che se* α *è una funzione completamente additiva definita sugli insiemi boreliani di* $\overline{\mathfrak{F}}_1$ *e se per ogni* P *interno a* $\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}$ *risulta*

$$\int_{\overline{\mathfrak{F}}_1} N(Q, P) d\alpha_Q = 0 \tag{5}$$

allora α *è identicamente nulla.*

Ora questo è possibile, come vedremo, *se introduciamo l'ipotesi sull'equazione aggiunta della* (1) *che valga il teorema di unicità per il problema misto generalizzato (« aggiunto » di quello inizialmente considerato nella introduzione del presente lavoro) inteso nel senso da me recentemente introdotto* [8].

Si tratta sostanzialmente di considerare la classe $\{v\}$ delle soluzioni $v(x_1, x_2)$ regolari in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}$ di $E^*(v) = 0$ che siano

a) di quadrato sommabile in $\mathfrak{D}$;

b) di classe 1 in $\mathfrak{D} - \overline{\mathfrak{F}}_1$;

c) soddisfino alla

$$\frac{dv}{d\nu} - bv = 0 \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}_2;$$

d) convergano « in media » su un opportuno sistema di curve $\{\gamma_r\}$ ad una funzione di quadrato sommabile su $\mathfrak{F}_1$.

La condizione *d*) va intesa nel modo seguente: si costruisca, come è sempre possibile, un sistema di curve regolari γ_r dipendenti del parametro r $(0 < r \leq r_0)$ aventi gli estremi su $\mathfrak{F}_2$ e per

(7) Se è $c \leq 0$ in $\mathfrak{D}'$ senza essere $c \equiv 0$, basta prendere la funzione di NEUMANN del dominio $\mathfrak{D}'$; altrimenti la funzione $N(Q, P)$ si costruisce risolvendo sempre un problema di NEUMANN relativo al dominio $\mathfrak{D}'$, approfittando dell'arbitrarietà delle condizioni su $\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}_2$ per soddisfare alle condizioni di compatibilità.

(8) V. E. MAGENES: 1) *Sui problemi al contorno misti per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, III, vol. VIII, 1954, pp. 93-120); 2) *Sul teorema dell'alternativa nei problemi misti per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine* (in corso di stampa sugli Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa).

il resto interne a $\mathfrak{D}$, trasversali a $\mathfrak{F}_2$ rispetto all'operatore $E(u)$ negli estremi, tendenti uniformemente a $\mathfrak{F}_1$ per $r \to 0$ e soddisfacenti a qualche ulteriore condizione qualitativa, che non è necessario precisare qui (si vedano con esattezza le memorie citate in (8) in particolare il § 1 della seconda memoria).

Riferite anche le curve γ, al parametro t, per $t_1 \leq t \leq t_2$, la condizione $d)$ va intesa nel senso che è

$$\lim_{r \to 0} \int_{t_1}^{t_2} [v_{\gamma_r}(t) - \mu(t)]^2 dt = 0$$

dove $\mu(t)$ è una funzione di quadrato sommabile in (t_1, t_2) e $v_{\gamma_r}(t)$ indica il valore assunto dalla funzione $v(x_1, x_2)$ nel punto di γ, corrispondente al valore t del parametro.

Il teorema di unicità per il problema misto (nel senso che esiste solo la funzione identicamente nulla che appartiene a $\{v\}$ e che soddisfa alla

$$\lim_{r \to 0} \int_{t_1}^{t_2} [v_{\gamma_r}(t)]^2 dt = 0) \tag{6}$$

vale nella classe $\{v\}$ in opportune ipotesi sull'equazione (1) (9), che sono sostanzialmente quelle nelle quali il teorema di unicità per detto problema misto viene abitualmente dimostrato nella classe delle funzioni di classe 1 in $\mathfrak{D}$ attraverso la formula di Green, e cioè esistenza di una funzione u di classe 2 in $\mathfrak{D}$, tale che

$$E(u) + c^* u \leq 0 \text{ in } \mathfrak{D}, \quad u > 0 \text{ in } \mathfrak{D} - \mathfrak{F}, \quad \frac{du}{d\nu} - bu \leq 0 \text{ su } \mathfrak{F}_2$$

(in particolare se $E(u)$ è autoaggiunto, basterà supporre $c \leq 0$).

Supponiamo allora che valga detto teorema di unicità nella classe $\{v\}$ e veniamo alla dimostrazione della completezza del sistema $\{w\}$ su $\overline{\mathfrak{F}}_1$.

Consideriamo all'uopo la funzione

$$v(P) = \int_{\overline{\mathfrak{F}}_1} N(Q, P) d\alpha_Q .$$

Affermo che $v(P)$ appartiene alla classe $\{v\}$ e soddisfa inoltre alla (6) e dunque è identicamente nulla in $\mathfrak{D}$.

(9) Si vedano le memorie citate in (8); in particolare il § 4 della seconda memoria.

Anzitutto $v(P)$ è di quadrato sommabile in $\mathfrak{D}$ in virtù della (4), per note proprietà della teoria del potenziale; $v(P)$ è poi di classe 1 in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}_1$ e soddisfa alla $\frac{dv}{d\nu} = 0$ su $\mathfrak{F}_2$ per la proprietà 2) di $N(Q, P)$.

Osserviamo inoltre che, in virtù della (5), noti ragionamenti già più volte sviluppati nella teoria del potenziale permettono di dimostrare che la funzione $v(P)$ è continua anche su $\mathfrak{F}_1$ e ivi si annulla.

Per dimostrare che $v(P)$ soddisfa alla (6), basterà dunque dimostrare l'uniforme sommabilità delle funzioni $v^2_{\gamma_r}(t)$ in (t_1, t_2) al variare di r nell'intervallo $(0, r_0)$, vale a dire: basterà dimostrare che l'integrale

$$\int_{\Delta} v^2_{\gamma_r}(t)dt \tag{7}$$

dove Δ è un sottoinsieme misurabile di (t_1, t_2), tende a zero con la misura di Δ, uniformemente rispetto a r.

Si ha infatti, indicato con $P_{t,r}$ il punto di γ_r corrispondente al valore t del parametro

$$\int_{\Delta} v^2_{\gamma_r}(t)dt = \int_{\Delta} dt \int_{\mathfrak{F}_1} N(Q, P_{t,r})d\alpha_Q \int_{\mathfrak{F}_1} N(M, P_{t,r})d\alpha_M =$$

$$= \int_{\Delta} \int_{\mathfrak{F}_1} \int_{\mathfrak{F}_1} N(Q, P_{t,r})N(M, P_{t,r})dt d\alpha_Q d\alpha_M \leq$$

$$\leq \int_{\Delta} \int_{\mathfrak{F}_1} \int_{\mathfrak{F}_1} (k \mid \log \overline{QP}_{t,r} \mid + k)(k \mid \log \overline{MP}_{t,r} \mid + k) dt dV\alpha_Q dV\alpha_M$$

in virtù anche della (4), avendo chiamato con V_α la variazione totale di α e con k una costante opportuna.

Con opportune considerazioni geometriche, per le ipotesi di regolarità ammesse sulle curve γ_r e $\mathfrak{F}$, non è difficile dimostrare che per r sufficientemente piccolo $(0 < r < r_1)$ è possibile per ogni t di (t_1, t_2) associare al punto $P_{t,r}$ un punto P_t appartenente a $\mathfrak{F}_1$ in modo che la funzione sotto il segno dell'ultimo integrale sia maggiorata, indipendentemente da r $(0 < r < r_1)$, dalla funzione

$$K(Q, M, P_t) = c \{ \mid \log \overline{QP}_t \mid \mid \log \overline{MP}_t \mid + \mid \log \overline{QP}_t \mid + \mid \log \overline{MP}_t \mid + 1 \}$$

(c costante)

D'altra parte, in virtù del teorema di Fubini-Tonelli, la funzione $K(Q, M, P_t)$ è sommabile rispetto alla misura $V_{\alpha_Q} \cdot V_{\alpha_M} \cdot m_t$ (m_t misura ordinaria in (t_1, t_2)) nell'insieme $\overline{\mathfrak{F}}_1 \times \overline{\mathfrak{F}}_1 \times (t_1\ t_2)$ poichè per un noto lemma ([10]) la funzione

$$H(Q, M) = \int_{t_1}^{t_2} K(Q, M, P_t)dt \tag{8}$$

è funzione continua di (Q, M) in $\overline{\mathfrak{F}}_1 \times \overline{\mathfrak{F}}_1$ e dunque sommabile rispetto alla misura $V_{\alpha_Q} \cdot V_{\alpha}$. Ne segue che l'integrale

$$\int_{\Delta} \int_{\overline{\mathfrak{F}}_1} \int_{\overline{\mathfrak{F}}_1} K(Q, M, P_t)dV_{\alpha_Q} \cdot dV_{\alpha_M}dt \tag{9}$$

tende a zero con la misura di Δ e ciò avviene anche dell'integrale (7) che è maggiorato da (9) *indipendentemente* da r.

La funzione $v(P)$ è dunque nulla in tutto $\mathfrak{D}' - \mathfrak{F}'$; di qui, dalla teoria del potenziale e dal fatto che al variare della funzione $\mathfrak{z}(P)$ nella classe delle funzioni hölderiane in $\mathfrak{D}'$ la funzione

$$\int_{\mathfrak{D}'} N(Q, P)\mathfrak{z}(P)dP$$

descrive un sistema completo nello spazio delle funzioni continue su $\mathfrak{F}'$ normalizzato nel modo abituale, si ha che α è identicamente nulla.

Resta così dimostrata la completezza lagrangiana di $\{w\}$ su $\mathfrak{F}_1$.

Lo stesso ragionamento ora fatto, nella stessa ipotesi, permette di dimostrare ovviamente la completezza hilbertiana di $\{w\}$ *su* $\mathfrak{F}_1$.

Osservazione. – Non sarà superfluo osservare, per rilevare l'importanza dei teoremi di completezza ora dimostrati, che dalla completezza lagrangiana di $\{w\}$ segue, come ha appunto ottenuto il Fichera nella memoria citata in ([4]), il teorema di esistenza per il problema misto: $E(u) = 0$ in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}$, $\dfrac{du}{d\nu} = 0$ su $\mathfrak{F}_2$, $u = \mu$ su $\mathfrak{F}_1$, nella classe delle funzioni continue in tutto $\mathfrak{D}$ e di classe 1 in $\mathfrak{D} - \overline{\mathfrak{F}}_1$; dalla completezza hilbertiana di $\{w\}$ segue invece il teorema di esistenza per lo stesso problema misto inteso nel senso generalizzato delle memorie citate in ([8]).

([10]) V. ad es. M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*, Napoli, 1940, pag. 806. Si osservi che è possibile fissare la legge che associa a $P_{t,r}$ il punto P_t in modo che sia applicabile all'integrale (8) il lemma succitato.

2. Daremo ora un rapido cenno alla estensione dei ragionamenti del n. precedente al caso di $m > 2$, fissandoci per semplicità al caso $m = 3$.

Anche senza sviluppare i calcoli e precisare le ipotesi, è facile capire come in condizioni analoghe a quelle poste per $m = 2$ i ragionamenti del n. precedente si possono ripetere con la sola eccezione seguente. Poichè nello spazio la (4) va sostituita con la

$$| N(Q, P) | \leq \frac{K}{\overline{QP}} \qquad (K \text{ costante})$$

la funzione $K(Q, M, P_t)$ risulta ora uguale a $\dfrac{C}{\overline{QP_t} \cdot \overline{MP_t}}$ (C costante) e la funzione $H(Q, M)$ analoga all'integrale (8) sarà, sempre per un noto lemma, funzione dei punti Q e M variabili sulla superficie $\mathfrak{F}_1$ soddisfacente alla limitazione

$$| H(Q, M) | \leq L \{ | \log \overline{QM} | + 1 \} \qquad (L \text{ costante}) \tag{10}$$

e come tale non più necessariamente sommabile su $\overline{\mathfrak{F}}_1 \times \overline{\mathfrak{F}}_1$ rispetto alla misura $V_{\alpha_Q} \cdot V_{\alpha_M}$ qualunque sia α.

La limitazione (10) permette solo di dire ora che $H(Q, M)$ è sommabile rispetto alla misura $V_{\alpha_Q} \cdot V_{\alpha_M}$ quando α provenga da una densità φ ($d\alpha = \varphi d\sigma$) di quadrato sommabile su $\overline{\mathfrak{F}}_1$; e infatti la funzione $H(Q, M) \varphi(Q) \varphi(M)$ è allora sommabile rispetto alla misura ordinaria su $\overline{\mathfrak{F}}_1 \times \overline{\mathfrak{F}}_1$. La (5) si riduce allora alla

$$\int_{\overline{\mathfrak{F}}_1} N(Q, P) \varphi(Q) \, d\sigma_Q = 0 \qquad P \varepsilon \mathfrak{D}' - \mathfrak{D}$$

con φ di quadrato sommabile.

Si ottiene così la completezza hilbertiana di $\{ w \}$ su $\overline{\mathfrak{F}}_1$.

Osservazione. – Sarà anche opportuno osservare che tutti i risultati del presente lavoro sono validi anche se alla derivazione conormale si sostituisce la derivazione lungo un asse obliquo regolare, cioè penetrante in $\mathfrak{D}$ e non mai tangente a $\mathfrak{F}$; basterà tenere presente che il teorema di unicità adoperato vale anche in questo caso (si veda il § 6 della memoria citata per seconda in ([8])) e che l'esistenza della funzione $N(Q, P)$ è assicurata da noti lavori di G. Giraud ([11]).

([11]) Si veda in particolare G. Giraud, *Equations à integrales principales, étude suivie d'une application* (Ann. Ecole Norm. Sup., t. 51, 1934, pp. 251-372).