Silvio Cinquini

Sopra il piano tangente a una superficie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.3, p. 400–412.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_3_400_0>

Sopra il piano tangente a una superficie.

Nota di SILVIO CINQUINI (a Pavia).

Sunto. - *Si illustrano le difficoltà che presenta la definizione di piano tangente a una superficie* $z = f(x, y)$, *quando non si presuppone la differenziabilità della funzione* $f(x, y)$; *e si rileva una nuova forma di tale definizione.*

Le presenti righe, che hanno come oggetto la definizione di piano tangente a una superficie, sono a carattere didattico e del tutto elementare: esse traggono origine dalla revisione delle « Lezioni di Analisi matematica » litografate, assieme ad altro autore, per i nostri studenti.

Come è ben noto, la nozione più espressiva di piano tangente a una superficie $z = f(x, y)$ in un suo punto P_0 sorge dall'osservazione che le tangenti alle curve della superficie passanti per P_0 sono contenute in un piano; però (n. 1), se non si presuppone la differenziabilità della funzione $f(x, y)$, si possono presentare inconvenienti, di cui anche G. PEANO [1] si era già reso ben conto.

D'altra parte sussistono (n. 2) definizioni indipendenti dalla differenziabilità di $f(x, y)$, le quali muovono da un ordine di idee notevolmente diverso dalla osservazione geometrica sopra citata. Ciò dipende dal fatto (il quale sussiste a maggior ragione, quando la superficie è posta o nella forma parametrica o in quella implicita), che la definizione di piano tangente è suscettibile di una certa arbitrarietà, la quale può essere utilizzata in vista dell'obiettivo da raggiungere. Ai cultori di Analisi matematica interessano le relazioni che intercedono tra l'esistenza del piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ e le proprietà differenziali della funzione $f(x, y)$.

A tal uopo, desideroso di non allontanarmi dall'osservazione geometrica ricordata inizialmente, perchè l'efficacia didattica di un concetto dipende dalla sua espressività, ho cercato di raffinarla in modo da ottenere *una* definizione di piano tangente (n. 3), avente carattere costruttivo e che non presupponga la differenziabilità della funzione $f(x, y)$. Seguono (n. 4) le proprietà della definizione del n. 3, rilevando (n. 5) che tale definizione non richiede affatto che ci sia corrispondenza biunivoca tra i punti di un intorno (del punto di tangenza) appartenente alla superficie e le loro proiezioni ortogonali sul piano tangente.

È evidente che le considerazioni fatte per la forma ordinaria si possono adattare al caso, in cui la superficie è data sotto forma parametrica. D'altra parte, se la superficie è posta sotto la forma $F(x, y, z) = 0$, o sono verificate le condizioni del ben noto teorema di esistenza della funzione implicita e allora si è ricondotti al caso della forma ordinaria, oppure intervengono considerazioni topologiche che esulano dal carattere della presente Nota.

1. Preliminari. - Nella maggior parte dei trattati (anche recentissimi) di Analisi matematica la definizione di piano tangente a una superficie [2]

$$S: \qquad z = f(x, y), \qquad ((x, y) \text{ in } A)$$

[1] Vedi G. PEANO. *Formulario mathematico.* Editio V. Tomo V, (Bocca, Torino, 1908), VI Calculo differentiale § 1, n. 70, pp. 332-3.

[2] Nella presente Nota ci riferiamo sempre ad assi cartesiani ortogonali.

in un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (ove (x_0, y_0) é interno ad A) viene data presupponendo la differenziabilità (secondo STOLZ) della funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) (³). Questa ipotesi pone l'autore nelle condizioni più favorevoli, ma esclude il caso in cui il piano tangente è parallelo all'asse z; e sopra tutto, se la trattazione non è opportunamente completata, l'esordiente rimane nell'incertezza, se tale ipotesi sia essenziale o se venga supposta soltanto per ragioni didattiche. In realtà, quando si prescinde dall'ipotesi della differenziabilità di $f(x, y)$ (e pur, bene inteso, nel caso elementare in cui il punto (x_0, y_0) è interno al campo A (⁴)), la definizione di piano tangente a S non è immediata. Per esempio:

(I) se si richiede che ogni curva della superficie S passante per il punto P_0 abbia tangente ordinaria (⁵) nel punto P_0, e che tutte queste tangenti siano contenute in uno stesso piano, non c'è alcun punto di alcuna superficie, in cui esiste il piano tangente: infatti, considerato un punto qualunque di una qualsiasi superficie, si può sempre tracciare una curva che appartiene alla superficie e che nel punto considerato non ha tangente ordinaria;

(³) È superfluo aggiungere che alcuni autori si pongono in condizioni più restrittive.

Inoltre, nemmeno nel caso della forma implicita o in quello della forma parametrica le rispettive ipotesi sono più ampie.

(⁴) Per il caso in cui (x_0, y_0) si trova alla frontiera di A rinviamo a: F. SEVERI-G. SCORZA DRAGONI. *Lezioni di Analisi.* Vol. II (N. Zanichelli, Bologna, 1942), Cap. V, § 8. In particolare richiamiamo l'attenzione del lettore sull'esempio del n. 10 (vedi pag. 283).

In ordine diverso dal carattere didattico della presente Nota, citiamo le seguenti Memorie:

F. SEVERI. *Su alcune questioni di topologia infinitesimale.* « Annales de la Société polonaise de mathématique ». T. IX (1930), pp. 97-108.

F. SEVERI. *Sulla differenziabilità totale delle funzioni di più variabili.* « Annali di Matematica pura e applicata », S. IV, T .XIII, (1934-5), pp. 1-35.

(⁵) Vale a dire: se Q_0 è un punto della curva continua

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad (a \leq t \leq b),$$

corrispondente a un unico valore t_0 del parametro (con $a < t_0 < b$) e se le rette, congiungenti Q_0 con il punto Q corrispondente al valore $t_0 + h$ del parametro e orientate da Q_0 a Q o da Q a Q_0 secondochè è $h > 0$ o $h < 0$, per $h \to 0$ tendono a un'unica retta orientata, questa retta assumiamo come tangente ordinaria.

In particolare, anche nel caso di una curva piana data sotto forma ordinaria, escludiamo che, se in Q_0 c'è tangente ordinaria, in Q_0 la curva presenti una cuspide.

(II) se si considerano soltanto quelle curve della superficie che nel punto P_0 hanno tangente ordinaria, e si richiede che queste tangenti siano contenute in un piano, anche nel caso in cui due sole, tra le curve della superficie passanti per P_0, hanno tangente ordinaria verrebbe individuato (bene inteso se queste due tangenti sono tra loro distinte) il piano tangente.

Nè, per citare un'altra eventualità, si potrebbe considerare come piano tangente il piano π che è luogo delle tangenti ordinarie alle curve della superficie S passanti per il punto P_0, intendendosi che:

α) la tangente a ogni curva della superficie S, passante per P_0 e avente tangente ordinaria in P_0, è contenuta nel piano π;

β) ogni retta del piano π appartenente al fascio di centro P_0 è tangente ordinaria ad almeno una curva della superficie S passante per P_0.

È evidente che tale definizione sarebbe insoddisfacente, come mostra il seguente

ESEMPIO 1°. - Chiamato D il campo costituito dai punti (x, y) soddisfacenti alle disuguaglianze $x > 0$, $0 < y < x^2$, sia $f_0(x, y)$ una funzione, la quale è nulla in ogni punto del piano (x, y) che non appartiene a D. Se assumessimo come definizione di piano tangente quella ora citata, nel punto $(0, 0)$ la superficie $z = f(x, y)$ avrebbe come piano tangente il piano $z = 0$, e ciò qualunque sia il modo nel quale la funzione $f_0(x, y)$ venga definita nel campo D: vale a dire, sia nel caso in cui la funzione non fosse continua nel punto $(0, 0)$, sia quando, per fissare le idee, definissimo

$$f_0(x, y) = \sqrt[5]{y(x^2 - y)}$$

in ogni punto di D. In questo ultimo caso la funzione $f_0(x, y)$ risulterebbe continua nell'origine, ma, considerata la curva $y = \frac{x^2}{2}$, si avrebbe

$$\lim_{h \to +0} \frac{f_0\left(h, \frac{h^2}{2}\right) - f_0(0, 0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{\sqrt[5]{\frac{h^2}{2}\left(h^2 - \frac{h^2}{2}\right)}}{h} = +\infty.$$

L'esempio ora indicato dà occasione di ricordare che, come è ben noto, per giungere alla nozione di piano tangente in P_0 alla superficie S mediante la considerazione delle tangenti alle curve della superficie S passanti per P_0, devono entrare in gioco i valori che la funzione $f(x, y)$ assume in tutti i punti di un intorno di (x_0, y_0) [6]: pertanto è del tutto ovvio che la presupposta differenziabilità della funzione $f(x, y)$ facilita notevolmente la definizione di piano tangente.

2. Le definizioni di S. Saks e di L. Tonelli. Vogliamo citare qualche definizione di piano tangente, la quale non presupponga la differenziabilità della funzione $f(x, y)$.

a) Di natura molto ampia è la seguente di S. SAKS [7]:

Il piano

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(ove $z_0 = f(x_0, y_0)$) è un piano tangente nel punto P_0, se il rapporto

$$R = \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}$$

(ove $z_1 = f(x_1, y_1)$) tende a zero quando $x_1 \to x_0$, $y_1 \to y_0$.

Rileviamo che, in base a questa definizione:

ESEMPIO 2°. - La superficie $z = x^{\frac{2}{3}}$ ha, in ogni punto $(0, y_0, 0)$, come piano tangente il piano $x = 0$.

ESEMPIO 3°. - La superficie $z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$ ha nel punto $(0, 0, 0)$ gli infiniti piani tangenti $Ax + By = 0$, ove $A^2 + B^2 > 0$.

Infatti nell' esempio 2°) è

$$R = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + (y_1 - y_0)^2 + x_1^{\frac{4}{3}}}},$$

e quindi

$$|R| \leq \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^{\frac{4}{3}}}} = |x_1|^{\frac{1}{3}};$$

pertanto $R \to 0$, quando $x_1 \to 0$.

Nell' esempio 3°), essendo

$$R = \frac{Ax_1 + By_1}{\sqrt{A^2 + B^2}\,\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{2}{3}}}}.$$

(6) Cfr. il successivo n. 3, *a*).

(7) S. SAKS. *On the surfaces without tangent planes.* « Annals of Matematics », vol. 34, (1933), pp. 114-24. Vedi pag. 116.

risulta

$$|R| \leq \frac{|A||x_1| + |B||y_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{2}{3}}}} \leq \frac{|x_1| + |y_1|}{(x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{3}}} \leq \sqrt[3]{2}\,(|x_1| + |y_1|)^{\frac{1}{3}},$$

e quindi $R \to 0$, quando x_1 e y_1 tendono a zero.

b) Notevole è la seguente definizione di L. TONELLI ([8]) avente carattere infinitesimale:

Supposto che la funzione $f(x, y)$ sia continua nel punto (x_0, y_0), un piano π passante per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è tangente in P_0 alla superficie S, se per esso risultano verificate le due seguenti proprietà:

(I) detto M un punto qualunque della superficie S, la sua distanza da π risulta, al tendere di M a P_0, infinitesima di ordine superiore alla distanza di M da P_0;

(II) fissato comunque un numero $\lambda > 0$, è possibile determinarne un altro $r > 0$, in modo che, condotta per un qualsiasi punto di π, distante da P_0 meno di r, la perpendicolare a π, questa perpendicolare incontri la superficie S in almeno un punto distante da P_0 meno di λ.

La condizione (I) di TONELLI non differisce dalla definizione di SAKS; mentre la condizione (II) impedisce che in P_0 possa esistere più di un piano tangente a S.

Riprendendo gli esempi considerati in *a*), soggiungiamo che non esiste piano tangente (secondo TONELLI) nei punti allora indicati.

TONELLI dimostra che, se nel punto P_0 esiste il piano tangente alla superficie S, la tangente a qualsiasi curva giacente sulla superficie S e passante per P_0 appartiene al piano tangente in P_0 a S, e inoltre stabilisce che, se il piano tangente in P_0 non è parallelo all'asse z, la sua esistenza è equivalente alla differenziabilità della funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0).

Rileviamo ancora che la definizione di TONELLI non richiede che sussista corrispondenza biunivoca tra i punti di un intorno (di P_0) appartenente a S e le loro proiezioni sul piano tangente.

3. Definizione. – a) *Sia* f(x, y) *una funzione definita e continua nel campo* A, *e sia* (x_0, y_0) *un punto interno ad* A. *Consideriamo tutte le curve* C *del campo* A *passanti per il punto* (x_0, y_0), *incon-*

([8]) Vedi L. TONELLI. *Lezioni di Analisi matematica.* Vol. II. (Litografia Tacchi, Pisa, 1940) Cap. VI, n. 83.

trate una sola volta al più da ogni parallela a ciascuno degli assi coordinati e aventi tangente ordinaria nel punto (x_0, y_0), *intendendo di considerare come curve* C *anche le parallele agli assi coordinati passanti per* (x_0, y_0). *Allora, se tutte le curve della superficie*

$$S: \qquad z = f(x, y),$$

passanti per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *e aventi come rispettive proiezioni ortogonali sul piano* (x, y) *le curve* C, *hanno tangente ordinaria nel punto* P_0, *e se tutte queste tangenti sono contenute in uno stesso piano* ω, *noi assumiamo* ω *come piano tangente (ordinario) alla superficie* S *nel punto* P_0.

b) È evidente che in ciascuno degli esempi 1°, 2°, 3°, dei nn. 1 e 2 non esiste il piano tangente inteso nel senso indicato in a).

c) Costruiamo un altro esempio (9):
Sia C_n, $(n = 2, 3, ...)$ la successione dei cerchi del piano (x, y) aventi rispettivamente il centro nel punto $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{2n}}\right)$ e raggio $\frac{1}{2^{2n}}$. Tenuto presente che due qualunque dei cerchi considerati non hanno a comune nè punti interni nè punti della circonferenza, definiamo nel piano (x, y) una funzione $f_1(x, y)$, ponendo rispettivamente

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2^n}\left[1 - 2^{4n}\left\{\left(x - \frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2^{2n}}\right)^2\right\}\right]^2$$

nel cerchio C_n, $(n = 2, 3, ...)$, mentre, in ogni punto (x, y) che non appartiene ad alcuno dei cerchi di tale successione, assumiamo

$$f_1(x, y) = 0.$$

È evidente che $f_1(x, y)$ è continua in ogni punto del piano (x, y), e che, fatta eccezione per l'origine, della stessa proprietà godono anche le sue derivate parziali del primo ordine. Essendo $f_1(x, 0) = 0$ per qualunque x, e $f_1(0, y) = 0$ per qualunque y, risulta

$$\frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

(9) Sussiste qualche analogia tra l'esempio del presente capoverso e quello dato da G. Valiron: *Sur les surfaces qui admettent un plan tangent en chaque point.* (« Bull. de la Société Mathématique de France ». T. 54 (1926), pp 190-198). Vedi n. 1, pag. 191.

Consideriamo la superficie

$$S_1: \qquad z = f_1(x, y).$$

Tenuto presente che la parabola $y = x^2$ passa per ciascuno dei centri dei cerchi della successione C_n, $(n = 2, 3, \ldots)$, rileviamo che:

se (h, k) è un punto della parabola considerata, il quale non è interno ad alcuno dei cerchi C_n è

$$\frac{f_1(h, k) - f_1(0, 0)}{h} = 0,$$

se (h, k) è il centro del cerchio C_n è

$$\frac{f_1(h, k) - f_1(0, 0)}{h} = \frac{1}{2^n} : \frac{1}{2^n} = 1.$$

Pertanto, siccome i centri dei cerchi C_n, $(n = 2, 3, \ldots)$ hanno come punto di accumulazione l'origine, è evidente che la curva

$$z = f_1(x, y), \qquad y = x^2$$

non ha tangente ordinaria nel punto $(0, 0, 0)$, e quindi in tale punto non esiste il piano tangente (nel senso indicato in a)) alla superficie S_1.

4. Proprietà del piano tangente. a) *Se la funzione* $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *é differenziabile nel punto* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ *(interno ad* A*), allora nel punto* $\mathrm{P}_0 \equiv (\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{f}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0))$ *la superficie*

$$S: \qquad z = f(x, y), \qquad ((x, y) \text{ in } A)$$

ammette piano tangente (nel senso del n. 3, a)) *non parallelo all'asse* z, *la cui equazione è*

$$z = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Infatti ogni curva C (n. 3, a)) può essere rappresentata sotto la forma $y = y(x)$ ove per $x = x_0$ esiste finita la derivata $y'(x)$, oppure sotto la forma $x = x(y)$ ove per $y = y_0$ esiste finita la derivata $x'(y)$, e pertanto il nostro asserto segue immediatamente da un'ovvia applicazione del teorema di derivazione delle funzioni composte.

b) Viceversa, *se la superficie*

$$S: \qquad z = f(x, y), \qquad ((x, y) \text{ in } A),$$

ammette nel punto $\mathrm{P}_0 \equiv (\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{f}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0))$ (*ove* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ *è interno ad* A) *piano tangente* (nel senso del n. 3, a)) *non parallelo all' asse* z, *allora la funzione* f(x, y) *è differenziabile nel punto* (x_0, y_0) [10] [11].

Per provare quanto abbiamo asserito, osserviamo innanzi tutto, che siccome, per definizione, nel punto P_0 devono esistere le tangenti (ordinarie) alle due curve intersezioni della superficie S rispettivamente con i piani $y = y_0$ e $x = x_0$, e siccome tali tangenti non sono parallele all'asse z, esistono finite entrambe le derivate parziali $f_x'(x_0, y_0)$, $f_y'(x_0, y_0)$; pertanto l'equazione del piano tangente alla superficie S nel punto P_0 è

$$z = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{1}$$

Ciò premesso, se nel punto (x_0, y_0) la funzione $f(x, y)$ non fosse differenziabile, esisterebbe almeno un numero $\eta > 0$ e una successione di punti

$$(x_0 + h_n, \ y_0 + k_n), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

con

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{h_n^2 + k_n^2} = 0, \tag{2}$$

tale che

$$\left| \frac{f(x_0 + h_n, y_0 + k_n) - f(x_0, y_0) - h_n f_x'(x_0, y_0) - k_n f_y'(x_0, y_0)}{\sqrt{h_n^2 + k_n^2}} \right| \geq \eta, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Considerato un sistema di coordinate polari avente l'origine nel punto (x_0, y_0) e l'asse polare parallelo alla direzione positiva dell'asse x, sia

$$h_n = \rho_n \cos \theta_n, \qquad k_n = \rho_n \operatorname{sen} \theta_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

ove è $0 < \rho_n$ e si intende che sia $0 \leq \theta_n < 2\pi$.

[10] La nostra affermazione non segue, come caso particolare, dal risultato raggiunto per l'iperpiano tangente da G. GUARESCHI [*Un concetto di derivazione delle funzioni di più variabili reali più ampio di quello della derivazione parziale.* « Mem. R. Accademia d'Italia », Vol. V (1934), pp. 173-207. Vedi Cap III, pag. 181], e anche la nostra dimostrazione è completamente diversa da quella di GUARESCHI.

[11] Al nostro caso non si addicono nemmeno le considerazioni sviluppate da M. FRÉCHET: *Sur la notion de différentielle totale.* « Nouvelles Annales de Mathématiques », T. XII (1912), pp. 385-403 e pp. 433-449). Vedi n. 4 pag. 389 e n. 14 pp. 436-39. Anzi, a nostro modesto parere, i luoghi ora citati dell'articolo di FRÉCHET potrebbero dar adito a qualche domanda.

Sia θ' un elemento di accumulazione della successione

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots, \tag{5}$$

dove, bene inteso, se in (5) esistono infiniti elementi tra loro uguali, possiamo assumere per θ' tale valore comune. In ogni caso nella successione (5) esiste almeno una successione parziale

$$\theta_{\mu_1}, \theta_{\mu_2}, \dots, \theta_{\mu_n}, \dots,$$

con

$$\lim_{n \to +\infty} \theta_{\mu_n} = \theta', \tag{6}$$

e inoltre possiamo senz'altro convenire che tale successione parziale sia stata scelta in modo che:

α) se una delle successioni

$$h_{\mu_n}, \ (n = 1, 2, \dots), \qquad k_{\mu_n}, \ (n = 1, 2, \dots) \tag{7}$$

è composta di elementi tutti nulli, l'altra sia crescente oppure decrescente;

β) se entrambe le successioni (7) non sono costituite di elementi tutti nulli, ciascuna di esse risulti (indipendentemente dall'altra) o crescente oppure decrescente.

Congiungendo mediante segmenti rettilinei ciascun punto della successione

$$(x_0 + h_{\mu_n}, \ y_0 + k_{\mu_n}), \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

con il successivo, otteniamo una poligonale C' incontrata una sola volta al più da ogni parallela a ciascuno dagli assi coordinati, ove, naturalmente, C' può essere un segmento rettilineo, il quale nel caso α) è parallelo a uno degli assi coordinati.

Inoltre, preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio $\left(\text{con } \varepsilon < \frac{\pi}{4}\right)$, in virtù delle (6) e (2) esiste un intero positivo n_0 tale che, per tutti gli $n > n_0$, è

$$\theta' - \varepsilon < \theta_{\mu_n} < \theta' + \varepsilon, \qquad \sqrt{h^2_{\mu_n} + k^2_{\mu_n}} < \varepsilon, \tag{8}$$

e quindi la curva C' tende al punto (x_0, y_0) e in questo punto risulta tangente alla retta $\theta = \theta'$. Pertanto prolungata la curva C' oltre il punto (x_0, y_0) mediante un segmento della retta $\theta = \theta'$, otteniamo una curva C^* passante per il punto (x_0, y_0) e che si trova nelle condizioni delle curve C indicate nella definizione del n. 3, a).

A questo punto, per fissare le idee, supponiamo che sia $\theta' \neq \frac{\pi}{2}$, $\theta' \neq \frac{3}{2}\pi$; allora la curva C^* ammette la rappresentazione $y = y(x)$, ove $y'(x_0) = \operatorname{tg} \theta'$ è finita. Sia

$$\Gamma^*: \qquad y = y(x), \qquad z = f(x, y(x))$$

la curva della superficie S che ha C^* come proiezione ortogonale sul piano (x, y).

Inoltre esiste un numero intero n_1 che possiamo supporre non inferiore a n_0 in modo che, per tutti gli $n > n_1$, sono verificate le disuguaglianze $\theta_{\mu_n} \neq \frac{\pi}{2}$, $\theta_{\mu_n} \neq \frac{3}{2}\pi$,

$$(9) \qquad | f_y'(x_0, y_0) | \, | \operatorname{tg} \theta_{\mu_n} - \operatorname{tg} \theta' | < \frac{\eta}{2}.$$

Essendo identicamente

$$\frac{f(x_0 + h_{\mu_n}, y(x_0 + h_{\mu_n})) - f(x_0, y(x_0))}{h_{\mu_n}} - [f_x'(x_0, y_0) + f_y'(x_0, y_0) \operatorname{tg} \theta'] =$$

$$= \frac{f(x_0 + h_{\mu_n}, y_0 + k_{\mu_n}) - f(x_0, y_0) - h_{\mu_n} f_x'(x_0, y_0) - k_{\mu_n} f_y'(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2_{\mu_n} + k^2_{\mu_n}}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_{\mu_n}} +$$

$$+ f_y'(x_0, y_0)[\operatorname{tg} \theta_{\mu_n} - \operatorname{tg} \theta'],$$

in virtù delle (3) e (9) risulta per tutti gli $n > n_1$

$$\left| \frac{f(x_0 + h_{\mu_n}, y(x_0 + h_{\mu_n})) - f(x_0, y(x_0))}{h_{\mu_n}} - [f_x'(x_0, y_0) + f_y'(x_0, y_0) \operatorname{tg} \theta'] \right| \geq$$

$$\geq \left| \frac{f(x_0 + h_{\mu_n}, y_0 + k_{\mu_n}) - f(x_0, y_0) - h_{\mu_n} f_x'(x_0, y_0) - k_{\mu_n} f_y'(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2_{\mu_n} + k^2_{\mu_n}}} \right| -$$

$$- | f_y'(x_0, y_0) | \, | \operatorname{tg} \theta_{\mu_n} - \operatorname{tg} \theta' | > \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2},$$

vale a dire o la curva Γ^* non ha tangente ordinaria nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ o tale tangente non è contenuta nel piano (1), contrariamente alla definizione del n. 3, a).

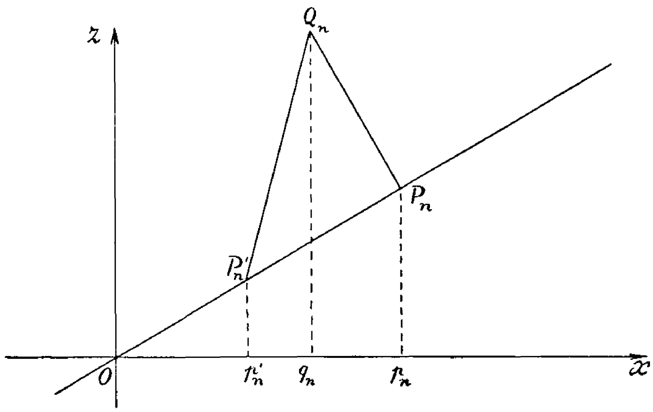
È così provato che la funzione $f(x, y)$ è differenziabile nel punto (x_0, y_0).

c) Il risultato raggiunto in *b)* permette di concludere che *il piano tangente* (inteso nel senso del n. 3, a) e non parallelo all'asse z) *contiene anche le tangenti a tutte le curve* $\mathrm{x} = \mathrm{x(t)}$, $\mathrm{y} = \mathrm{y(t)}$, $\mathrm{z} = \mathrm{f(x(t), y(t))}$, passanti per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, e tali che, se è $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, per $t = t_0$ esistono finite entrambe le derivate $x'(t)$, $y'(t)$ con $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) \neq 0$.

Infatti, siccome nel punto (x_0, y_0) la funzione $f(x, y)$ risulta differenziabile, per provare quanto abbiamo ora asserito, basta usufruire del teorema di derivazione delle funzioni composte.

d) Osservazione. Dai risultati raggiunti nel presente numero risulta che la definizione del n. 3, a), almeno nel caso in cui il piano tangente non è parallelo all'asse z, è del tutto equivalente a quella data da L. Tonelli nel luogo citato in [8].

5. Esempio. Osservazione. *a)* Nel piano (x, z) consideriamo sulla semiretta $z = \frac{1}{\sqrt{3}} x$ $(x > 0)$ la successione di punti P_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, ove la distanza di P_n dall'origine è $\frac{1}{2n}$. Per ogni intero positivo



n costruiamo il triangolo $P_n\, P_n'\, Q_n$, rettangolo in P_n, con $\overline{P_n'P_n} = \overline{P_nQ_n} = \frac{1}{4n^2}$, e ove P_n' appartiene alla semiretta indicata e ha ascissa minore di P_n, e Q_n si trova nel semipiano $z > \frac{1}{\sqrt{3}} x$.

Siano p_n, q_n, p_n', $(n = 1, 2, \ldots)$ rispettivamente le ascisse dei punti P_n, Q_n, P_n' e, tenuto presente che è $p_2 = p'_1$; $p_{n+1} < p_n'$, $(n = 2, 3, \ldots)$, definiamo in tutto $(-\infty, +\infty)$ la funzione $z = g(x)$ nel seguente modo: in ciascuno degli intervalli (p_n', q_n), (q_n, p_n), $(n = 1, 2, \ldots)$ essa è definita dalla sua grafica costituita rispettivamente dai segmenti $\overline{P_n'Q_n}$, $\overline{Q_nP_n}$, mentre per ogni altro x assumiamo $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} x$. Tenuto presente che i punti Q_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ appartengono ad una parabola, la quale nell'origine è tangente alla retta $z = \frac{1}{\sqrt{3}} x$, è evidente che la derivata $g'(x)$ esiste finita per $x = 0$, e che è $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pertanto considerata nello spazio (x, y, z) la superficie cilindrica $z = g(x)$, siccome in qualunque punto (x, y) è $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, z, considerata come funzione delle due variabili (x, y), è differenziabile nel punto $(0, 0)$, e quindi (n. 4, a)) la superficie $z = g(x)$ ammette nell'origine come piano tangente (nel senso del n. 3, a)) il piano $z = \frac{1}{\sqrt{3}} x$.

b) La definizione che abbiamo introdotta al n. 3, a) potrebbe dar adito all'idea di modificare la definizione stessa nella seguente forma, che indichiamo in termini sommari e che a prima vista potrebbe sembrare preferibile: un piano Ω è tangente in P_0 alla superficie S, quando, considerate le curve K appartenenti a Ω, passanti per P_0 e aventi tangente ordinaria in P_0, ogni curva della superficie S passante per P_0 e avente come proiezione ortogonale su Ω una curva K ha tangente ordinaria in P_0, e tutte queste tangenti sono contenute in Ω.

Ma evidentemente, per individuare quelle curve della superficie S che hanno come proiezione ortogonale su Ω le curve K, occorre che ci sia corrispondenza biunivoca tra i punti di un intorno (del punto P_0) appartenente alla superficie S e le loro proiezioni ortogonali sul piano Ω, mentre, come risulta dall'esempio indicato al capoverso *a*), la definizione data al n. 3, a) non richiede affatto che sussista tale corrispondenza biunivoca.