RENATO NARDINI

Su particolari onde cilindriche della magneto-idrodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.3, p. 349–362.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_3_349_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Su particolari onde cilindriche della magneto-idrodinamica.

Nota di Renato Nardini (a Bologna)

Sunto. - *È esposto nel n. 1 con inizio dal terzo capoverso.*

1. Introduzione. - Si può affermare che la magneto-idrodinamica è sorta come nuovo ramo della fisica-matematica con la scoperta teorica da parte di Alfvén [1] delle onde magneto-idrodinamiche piane.

Data la complessità dell'impostazione matematica della magneto-idrodinamica, fondata sull'associazione dell'equazioni dell'elettromagnetismo con quelle dell'idrodinamica classica, tutte le successive ricerche al riguardo sono state limitate, fino a poco tempo fa, quasi esclusivamente al caso piano, cioè al caso in cui tutte le grandezze in questione dipendono da una sola coordinata cartesiana e dal tempo. Recentemente però sono apparsi quattro lavori di Agostinelli [2], in cui, con evidente aderenza a problemi

[1] H. Alfvén, *On the Existence of Elektromagnetic-hydrodynamic Waves*, Ark. f. mat. astr. o. fys. *29 B* N. 2, 1942. Si veda anche dello stesso Autore il cap IV del trattato *Cosmical Elektrodynamics*, Oxford a. Clarendon Press, 1950. Per la verità non sono mancati in precedenza dei lavori riguardanti il moto di un fluido elettricamente conduttore soggetto ad un campo elettromagnetico, lavori dovuti a J. Hartmann (*Hg-Dynamics I. Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field*, Medd. Kopenhagen, *15*, 1937, n. 6) ed a J. Hartmann e F. Lazarus (*Hg-Dynamics II. Experimental investigations on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field*, id. n. 7), ma si tratta di un caso molto particolare che non porta a risultati così decisivi da dare l'avvio ad un campo di ricerche. I due precedenti lavori sono ampiamente riassunti e completati nella nota J. A. Shercliff, *Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields*, Proc. Camb. Phil. Soc., *49*, 1953, 136-144.

[2] C. Agostinelli, *Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto idrodinamica interessanti la Cosmogonia*. Rend. Acc. Naz. Lincei (8) *17*, 1954, 216-221; *Oscillazioni magneto idrodinamiche di una massa fluida rotante di dimensioni cosmiche di forma ellissoidale rotonda*, Atti Acc. Sc. Torino, *89*, 1954-55, 41-58; *Oscillazioni magnetoidrodinamiche di una massa fluida cosmica uniformemente rotante dotata di un campo magnetico equatoriale rotante*, id. 68-92; *Sulla compatibilità di una forma ellissoidale a tre assi per una massa fluida cosmica rotante, elettricamente conduttrice, immersa in un campo magnetico uniforme*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) *10*, 1955, 17-23.

cosmici, si studiano per le equazioni della magneto-idrodinamica delle soluzioni stazionarie e piccole oscillazioni nell'intorno di queste in una regione ellissoidale; sono da rilevare inoltre lavori di CHANDRASEKHAR e FERMI e di LYTTKENS (3), in cui, con riferimento anche allo studio di moti che possono aver luogo nei bracci di spirale di una nebulosa, si studiano fenomeni magneto-idrodinamici in una regione cilindrica.

Nello schema di questi ultimi lavori si prende in considerazione qui lo spazio limitato da un cilindro circolare $\mathcal{C}$, spazio che si suppone occupato da un fluido omogeneo, incompressibile, viscoso, elettricamente conduttore, soggetto ad una forza di massa dipendente da un potenziale. Si richiamano anzitutto (n. 2) le equazioni generali della magneto-idrodinamica. Si ricavano poi (n. 4) le corrispondenti equazioni scalari espresse in coordinate cilindriche, limitandosi al caso in cui la pressione e le componenti dei vettori velocità e campo magnetico dipendono solo dal tempo t e dalla distanza r dall'asse del cilindro $\mathcal{C}$: si ottengono così due problemi, matematicamente separati, riguardanti l'uno le componenti assiali del campo magnetico e della velocità, l'altro le corrispondenti componenti trasversali. Le relative equazioni, alle derivate parziali, risultano ovviamente a coefficienti non costanti. Si può, tuttavia, per entrambi i problemi calcolare (n. 5) una classe di soluzioni che chiameremo semistazionarie, in quanto constano di un campo magnetico dipendente solo dalla distanza r e di un moto che dipende anche dal tempo o viceversa; tale classe contiene, come caso particolare, l'integrale generale del caso stazionario (cioè con dipendenza solo da r).

Quando poi si suppone nulla la viscosità e infinita la conducibilità elettrica del fluido, si può ricavare (n. 6) l'integrale generale del problema non stazionario che riguarda le grandezze assiali: dal punto di vista fisico si riscontra allora una propagazione per onde cilindriche, che possono essere progressive e recessive, con velocità del fronte d'onda espressa da $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, H_r$, essendo μ la permeabilità magnetica, ρ la densità del fluido ed H_r il campo

(3) S. CHANDRASEKHAR e E. FERMI, *Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field*, Astroph. J. *118*, 1953, 116-141; *Magnetic fields in spiral arms*, id. 113-115; E. LYTTKENS, *On the radial pulsations of an infinite cylinder with a magnetic field parallel to its axis*, id., *119*, 1954, 413-424. Si veda anche S. CHANDRASEKHAR, *The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a magnetic field*, Proc. Roy. Soc. A, *216*, 1953, 293-309.

magnetico radiale, che si dimostra essere stazionario e inversamente proporzionale ad r. Sussistono così delle analogie con il caso di onde piane che, per comodità, è stato richiamato in precedenza (n. 3).

Si può dedurre analogo comportamento, in via approssimata, per le componenti trasversali del campo magnetico e della velocità, purchè si consideri il fenomeno a grande distanza dall'asse del cilindro (n. 7).

Sempre entro la detta approssimazione si calcola infine la pressione e si fanno alcune considerazioni energetiche (n. 8).

2. Equazioni della magneto-idrodinamica. – Siano $\boldsymbol{E}$ il campo elettrico, $\boldsymbol{H}$ il campo magnetico, $\boldsymbol{i}$ la densità di corrente di conduzione (rispetto alla quale si suppone trascurabile la corrente di spostamento), $\boldsymbol{v}$ la velocità di una generica particella del mezzo; se γ è la conducibilità elettrica e μ la permeabilità magnetica (supposte entrambe costanti), le equazioni dell'elettromagnetismo sono fornite dal seguente quadro

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \tag{1}$$

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{i} = \gamma(\boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}) \tag{3}$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{H} = 0. \tag{4}$$

A queste associamo le equazioni dell'idrodinamica, che, per un fluido incompressibile, sono date da

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p + \frac{\mu}{\rho}\,\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{H} + \text{grad}\,U - \nu\,\text{rot}\,\text{rot}\,\boldsymbol{v} \tag{5}$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{v} = 0, \tag{6}$$

dove p è la pressione, U il potenziale delle forze esterne non elettromagnetiche agenti sull'unità di massa e ν è il coefficiente cinematico di viscosità.

Se si prende il rotore di ambo i membri della (1) e si tiene conto della (2) e della (3), si può eliminare $\boldsymbol{i}$ ed $\boldsymbol{E}$ fra le dette equazioni ottenendo

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\gamma}\,\text{rot}\,\text{rot}\,\boldsymbol{H} + \text{rot}\,(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}). \tag{7}$$

Esprimendo poi il moto dal punto di vista euleriano risulta

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \text{rot}\,\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} + \text{grad}\,\frac{v^2}{2}$$

ed inoltre eliminando i nella (5) mediante la (1) si ottiene l'equazione

$$(8)\quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\operatorname{rot} v \wedge v + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\right) - \nu \operatorname{rot}\operatorname{rot} v.$$

Alle (7) ed (8) vanno naturalmente aggiunte le equazioni (4) e (6).

3. Richiamo sulle onde piane. – È noto [4] che si hanno onde magneto-idrodinamiche piane quando le grandezze in questione dipendono dal tempo e da una sola coordinata cartesiana ortogonale, per esempio la z, ed inoltre il fluido è perfetto ($\nu = 0$) e perfettamente conduttore ($\gamma = \infty$); allora, supposta nulla la componente della velocità lungo l'asse z, in presenza di un campo magnetico costante H_0 parallelo all'asse z, le restanti componenti v_x e v_y della velocità ed H_x ed H_y del campo magnetico soddisfano all'equazione di D'ALEMBERT, dando così luogo ad una propagazione ondosa con velocità

$$(9)\qquad V = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, H_0 .$$

Rilevando che le componenti v_x ed H_x danno luogo ad un problema matematicamente separato da quello delle componenti v_y ed H_y [5], ricordiamo che per una sola onda progressiva si ha

$$(10)\qquad v_i = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, H_i \qquad (i = x,\ y)$$

mentre per una sola onda recessiva si ha

$$(11)\qquad v_i = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, H_i \qquad (i = x,\ y).$$

4. Equazioni in coordinate cilindriche. – Riferiamoci ora ad un sistema di coordinate cilindriche r, θ, z e supponiamo che la pressione p, il potenziale della forza esterna U e le componenti dei vettori v ed $\boldsymbol{H}$ dipendano solo dal tempo e dalla coordinata r: con ciò, contrassegnando con l'indice r, θ, z la componente di un

[4] Si veda il Cap. IV del trattato citato nella nota [1].

[5] Tale fatto sussiste anche per $\gamma \neq \infty$ e $\nu \neq 0$: si veda R. NARDINI, *Soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica*, Ann. Mat. (4) *35*, 269-290, 1953, dove è immediata l'introduzione del termine relativo alla viscosità.

vettore lungo la corrispondente linea coordinata, la (4) e la (6) diventano rispettivamente

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r H_r}{\partial r} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} = 0. \tag{13}$$

In accordo con la (13) introduciamo l'ipotesi che sia

$$v_r \equiv 0. \tag{14}$$

D'altra parte proiettando la (7) sulla linea coordinata r si ottiene [6]

$$\frac{\partial H_r}{\partial t} = 0\,; \tag{15}$$

se ne deduce che H_r non può variare col tempo e quindi dalla (12) si ricava

$$H_r = \frac{\lambda}{r} \quad (^7) \tag{16}$$

dove λ è una costante di integrazione. Se si pone

$$\lambda = \frac{\Phi}{2\pi},$$

la nuova costante Φ rappresenta il flusso che il campo stazionario H_r produce attraverso una qualunque linea piana giacente su un piano normale all'asse z e con essa concatenata. Il valore di Φ si può determinare quando sia noto il valore H_0 di H_r ad una distanza assegnata r_0 ed è precisamente $\Phi = 2\pi r_0 H_0$.

[6] Indicando con $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ rispettivamente i versori delle linee coordinate r, θ, z si ha infatti

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r H_\theta}{\partial r}\right)\boldsymbol{b} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{c},$$

inoltre, servendosi dell'ipotesi $v_r = 0$, si ricava la formula

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}) = \frac{\partial v_\theta H_r}{\partial r}\boldsymbol{b} + \frac{1}{r}\frac{\partial r v_z H_r}{\partial r}\boldsymbol{c}.$$

[7] Un campo magnetico di tale specie è realizzabile ed ha, ad esempio, applicazione negli altoparlanti elettrodinamici.

Tenendo conto della (14) e della (16), proiettiamo ora la (7) e la (8) sull'asse z; si ottiene il sistema [8]

$$
(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial t} = \lambda \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial v_z}{\partial r} + \dfrac{1}{\mu\gamma} \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial H_z}{\partial r}\right) \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} = \dfrac{\mu\lambda}{\rho} \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial H_z}{\partial r} + \nu \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right); \end{cases}
$$

tale sistema risulta autonomo e contiene solo le incognite H_z e v_z; per eliminare v_z si può ricavare dalla (17_1)

$$
\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{\lambda} r \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{1}{\mu\gamma\lambda} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial H_z}{\partial r}\right)
$$

e sostituire nell'ultimo termine a secondo membro di (17_2); sommiamo poi la (17_1), derivata rispetto a t, con la (17_2) derivata rispetto ad r e moltiplicata successivamente per $\frac{\lambda}{r}$; si ottiene così

$$
(18)\qquad \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{\mu\lambda^2}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{\mu\gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t}\left(r \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r^2 H_z}{\partial r \partial t}\right) -
$$

$$
- \frac{\nu}{\mu\gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H_z}{\partial r}.
$$

Se invece si volesse eliminare la H_z, si otterrebbe che v_z soddisfa ad un'equazione che si ricava dalla precedente, scambiando fra loro i coefficienti ν ed $\frac{1}{\mu\gamma}$ [9].

[8] In coordinate cilindriche e con la dipendenza dalla sola coordinata r è infatti

$$
\operatorname{rot} u \wedge u = \left(- u_z \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial r u_\theta}{\partial r}\right) a + \frac{u_r}{r} \frac{\partial r u_\theta}{\partial r} b + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} c
$$

$$
\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} a.
$$

[9] Ciò è giustificato dal fatto che le due equazioni del sistema (17) si scambiano una con l'altra cambiando H_z in v_z, v_z in $\frac{\mu}{\rho} H_z$ e scambiando i coefficienti ν ed $\frac{1}{\mu\gamma}$.

Proiettando invece la (7) e la (8) sulla linea coordinata θ si ottiene

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_\theta}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial \frac{1}{r} v_\theta}{\partial r} + \dfrac{1}{\mu\gamma} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r H_\theta}{\partial r}\right) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial t} = \dfrac{\mu\lambda}{\rho} \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial r H_\theta}{\partial r} + \nu \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r v_\theta}{\partial r}\right) \end{cases}$$

che del pari risulta un sistema indipendente nelle sole incognite H_θ e v_θ. Per brevità non ricaveremo le equazioni a cui soddisfano separatamente H_θ e v_θ; tali equazioni, contrariamente a quello che è visto per H_z e v_z, sono sostanzialmente diverse fra loro.

Se infine si proietta la (8) sulla linea coordinata r si ha l'equazione

$$(20)\qquad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r}(\rho v_\theta^2 - \mu H_\theta^2) - \frac{\partial}{\partial r}\left[-\rho U + \frac{\mu}{2}(H_\theta^2 + H_z^2)\right],$$

dalla quale, dopo aver risolto separatamente i sistemi (17) e (19), è possibile ricavare la pressione p (che risulta indipendente da v_z).

5. Casi semistazionari e caso stazionario. - L'integrazione completa dei sistemi (17) e (19) si presenta ardua. È invece facile trattare il caso stazionario. Si preferisce però qui ricavare la soluzione del caso stazionario quale caso particolare di una classe di quelle soluzioni, che chiameremo semistazionarie, in cui una sola delle due grandezze che compaiono nei detti sistemi risulta indipendente dal tempo.

Se, per esempio, nel sistema (17) si suppone $v_z = v_z(r, t)$ ed $H_z = H_z(r)$, derivando entrambe le equazioni parzialmente rispetto al tempo t si hanno le relazioni

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t \partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = 0$$

da cui segue che dev'essere

$$v_z = At + B + f(r)$$

con A e B costanti arbitrarie ed $f(r)$ funzione incognita.

Posto poi

$$f'(r) = \varphi \qquad H_z'(r) = \psi$$

per la determinazione delle funzioni incognite φ e ψ si ha il sistema alle derivate ordinarie

$$(21)\qquad \begin{cases} 0 = \lambda \dfrac{1}{r}\varphi + \dfrac{1}{\mu\gamma}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\psi) \\[2ex] A = \dfrac{\mu\lambda}{\rho}\dfrac{1}{r}\psi + \nu\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\varphi). \end{cases}$$

Ricavando dalla prima

$$(22)\qquad \varphi = -\frac{1}{\mu\gamma\lambda}\frac{d}{dr}(r\psi),$$

ci si riduce all'equazione nella sola incognita ψ

$$(23)\qquad -\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(r\psi)\right] + \beta^2\psi = \frac{\mu\gamma\lambda A}{\nu}r \qquad \left(\beta^2 = \frac{\mu^2\lambda^2\gamma}{\rho\nu}\right),$$

il cui integrale generale nel caso in cui sia $\beta^2 \neq 4$ è ([10])

$$\psi = C_1 r^{-1+\beta} + C_2 r^{-1-\beta} + \frac{\mu\gamma\lambda A}{\nu(\beta^2-4)}r$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Segue

$$(24)\qquad H_z(r) = \frac{C_1}{\beta}r^{\beta} - \frac{C_2}{\beta}r^{-\beta} + C_3 + \frac{\mu\gamma\lambda A}{2\nu(\beta^2-4)}r^2 \qquad (\beta^2 \neq 4)$$

con C_3 nuova costante arbitraria. Applicando la (22) e risalendo a v_z si ricava

$$(25)\qquad v_z(r,\, t) = -\frac{1}{\mu\gamma\lambda}(C_1 r^{\beta} + C_2 r^{-\beta}) + C_4 + At - \frac{A}{\nu(\beta^2-4)}r^2,$$

dove C_4 è una costante arbitraria che ha conglobato anche la precedente costante additiva B. Le quattro costanti C e la A si possono determinare assegnando, per esempio, la H_z e la v_z (quest'ultima al tempo $t=0$) per due valori distinti di r e dando inoltre il valore di $\dfrac{\partial v_z}{\partial t}$ per $t=0$ cioè, praticamente, assegnando la costante A.

Se inversamente si suppone $v_z = v_z(r)$ ed $H_z = H_z(r,\, t)$, si ricava analogamente che deve essere

$$H_z = Lt + M + g(r)$$

([10]) Ponendo infatti $\psi = r^{\alpha}$ l'equazione omogenea corrispondente alla (23) dà luogo all'equazione algebrica $(\alpha+1)^2 - \beta^2 = 0$. Nel caso poi in cui sia $\beta^2 \neq 4$, è immediata la verifica dell'integrale particolare $\dfrac{\mu\gamma\lambda A}{\nu(\beta^2-4)}r$.

con L ed M costanti arbitrarie e, posto,

$$g'(r) = \psi \quad , \quad v_z'(r) = \varphi$$

ci si riconduce ad un sistema che differisce dal sistema (21) solo per il fatto che la prima equazione contiene a primo membro la costante L, mentre la seconda è omogenea. L'unica operazione da eseguire è perciò quella di trovare un integrale particolare del sistema completo che, sempre nel caso in cui sia $\beta^2 \neq 4$, è fornito per H_z e v_z rispettivamente da

$$(26) \qquad -\frac{\mu\gamma L}{\beta^2 - 4} r^2 \quad , \quad \frac{\mu\gamma\lambda L}{2\nu(\beta^2 - 4)} \frac{\mu}{\rho} r^2. \quad (^{11})$$

In maniera analoga si può procedere nei riguardi delle componenti trasversali; per facilitare il calcolo conviene assumere quali funzioni incognite rH_θ e $\frac{v_\theta}{r}$. Posto

$$\delta = \sqrt{\beta^2 + 1}$$

e supposto $\beta^2 \neq 8$, i risultati sono espressi dalle formule

$$(27) \quad rH_\theta(r, t) = \frac{D_1}{\delta + 1} r^{\delta+1} + \frac{D_2}{-\delta + 1} r^{-\delta+1} + D_3 + \begin{cases} Pt - \frac{\nu\rho P}{\mu\lambda^2} r^2 \\ \frac{\lambda\mu\gamma Q}{4\nu(\beta^2 - 8)} r^4 \end{cases}$$

$$(28) \quad \frac{v_\theta(r, t)}{r} = -\frac{1}{\mu\gamma\lambda}(D_1 r^{\delta-1} + D_2 r^{-\delta-1}) + D_4 + \begin{cases} \frac{P}{\lambda} \log r \\ Qt - \frac{Q}{\nu(\beta^2 - 8)} r^2 \end{cases}$$

dove P, Q e i D sono costanti arbitrarie e dove si fa la convenzione di prendere in entrambe le formule gli stessi termini (superiori o inferiori) dopo il simbolo $<$.

Tali soluzioni semistazionarie mettono in evidenza la possibilità di creare un determinato campo magnetico facendo assumere al liquido un determinato moto e viceversa.

L'integrale generale del caso stazionario si ricava ovviamente dalle (24), (25), (27) e (28) facendovi $A = P = Q = 0$; si vede, come caso particolare, che, facendo ulteriormente $D_1 = D_2 = 0$ nelle (27)

(11) Si noti che da questo sistema di integrali particolari si ricava il sistema di integrali particolari che compare nelle (24) e (25) facendo gli scambi di cui si è parlato nella nota (9).

e (28), un campo magnetico $H_\theta = \frac{D_3}{r}$, ottenibile, com'è noto, da una corrente continua di intensità costante che percorra un filo disposto lungo l'asse z, non interferisce con un moto di rotazione uniforme intorno al detto asse, individuato dalla velocità $v_\theta = D_4 r$ $\left(\text{sempre in presenza del campo magnetico radiale } H_r = \frac{\lambda}{r}\right)$.

6. Integrazione relativa alle componenti assiali nel caso di un fluido ideale perfettamente conduttore. – Nel caso di un fluido ideale ($\nu = 0$) e perfettamente conduttore ($\gamma = \infty$), la (18) diventa

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{\mu\lambda^2}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r}\right); \tag{29}$$

di tale equazione è possibile calcolare immediatamente l'integrale generale: adattando opportunamente al nostro caso il procedimento usato per l'equazione delle corde vibranti, basta introdurre le nuove variabili ξ ed η definite da

$$\xi = t - \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha}\ , \quad \eta = t + \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha}\ , \quad \alpha = \lambda\left|\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right|, \ r_0 = \text{cost.}$$

per trasformare la (29) nell'equazione

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \tag{30}$$

il cui integrale generale è $G_1(\xi) + G_2(\eta)$, con G_1 e G_2 funzioni arbitrarie, e, ritornando alle variabili di partenza, ha la forma

$$G_1\left(t - \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha}\right) + G_2\left(t + \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha}\right).\ ^{(12)}$$

Supponendo $r > r_0$, cioè studiando il fenomeno all'esterno di un cilindro $\mathcal{C}$ di raggio r_0, introducendo le condizioni iniziali

$$H_z(r,\ t) = \frac{\partial H_z(r,\ t)}{\partial t} = 0 \quad \text{per} \quad t = 0$$

([12]) Le curve caratteristiche dell'equazione (30) sono quindi nel piano ξ, η le rette $\xi = \text{cost.}$, $\eta = \text{cost.}$ cioè per l'equazione (29) nel piano r, t, tali curve sono rappresentate dalle parabole

$$t = \frac{r^2}{2\alpha} + \text{cost.}\ , \quad t = -\frac{r^2}{2\alpha} + \text{cost.}$$

e la condizione al contorno

$$H_z(r,\ t) = G_z(t) \quad \text{per} \quad r = r_0,$$

si ricava per H_z l'espressione

$$(31) \qquad \begin{aligned} H_z(r,\ t) &= G_z\left(t - \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha}\right) \quad \text{per} \quad t > \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha} \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{per} \quad t < \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha}\,. \end{aligned} \qquad (r > r_0)$$

La (31) rappresenta fisicamente una propagazione per onde cilindriche del campo magnetico assiale H_z a partire dal cilindro $\mathcal{C}$. Per ricavare la velocità di propagazione osserviamo che, trascorso un intervallo infinitesimo di tempo dt, l'argomento della G_z mantiene lo stesso valore se ci si sposta di un dr legato a dt dalla relazione ([13])

$$dr = \frac{\alpha}{r}\,dt,$$

per cui la velocità di propagazione è data da

$$\frac{\alpha}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,\frac{\lambda}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,H,$$

con evidente analogia con la formula (9) del caso piano e in accordo con una formula generale data da CARINI ([14]).

Per quanto riguarda la componente v_z della velocità, dalle equazioni (17) in cui si sia fatto $\nu = 0$ e $\gamma = \infty$, si ricava

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r}{\lambda}\,G_z'\left(t - \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,G_z'\left(t - \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha}\right)$$

da cui, supposto $G(0) = 0$ e supposta nulla la v_z per $t = 0$ ed $r = r_0$, si ottiene

$$v_z(r,\ t) = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,G_z\left(t - \frac{r^2 - r_0^2}{2\alpha}\right) = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,H_z\,.$$

Supponiamo invece $r < r_0$, cioè si esamina il fenomeno all'interno del cilindro $\mathcal{C}$ (ed eventualmente all'esterno di un cilindro

([13]) Ovviamente si trascura $(dr)^2$.

([14]) G. CARINI, *Condizioni di compatibilità dinamica nella teoria delle onde magneto-idrodinamiche,* Rend. Ist. Lomb. Sc., *87*, 1954, 433-438.

di raggio r_1 con $0 < r_1 < r_0$, per evitare la singolarità di $H_r = \frac{\lambda}{r}$ per $r = 0$), mantenendo inalterate le condizioni iniziali e al contorno; all'onda progressiva eventualmente proveniente dal cilindro più interno si sovrappone (senza interferire, data la linearità delle equazioni) un'onda recessiva che dà ad H_z il contributo

$$
(32) \qquad \begin{array}{lll} G_z\left(t + \dfrac{r^2 - r_0^2}{2\alpha}\right) & \text{per} & t > \dfrac{r_0^2 - r^2}{2\alpha} \\ 0 & \text{per} & t < \dfrac{r_0^2 - r^2}{2\alpha} \end{array}
$$

e, corrispondentemente, a v_z il contributo

$$
\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, H_z .
$$

Si conclude quindi che l'esistenza di un'onda cilindrica progressiva dà un campo magnetico assiale antiparallelo alla componente assiale della velocità, mentre l'esistenza di un'onda cilindrica recessiva dà un campo magnetico assiale che è proprio parallelo alla corrispondente velocità: tale risultato coincide con quanto avviene per le onde piane, come si è ricordato al n. 3.

7. Integrazione approssimata relativa alle componenti trasversali. – Sempre riferendosi al caso di un fluido ideale e perfettamente conduttore, il sistema (19) diventa

$$
(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_\theta}{\partial t} &= \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\, v_\theta\right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= \frac{\mu\lambda}{\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\, H_\theta\right) \end{aligned} \right.
$$

per il quale non sembra immediato il calcolo dell'integrale generale. Se però ci si limita a studiare il fenomeno a distanza r sufficientemente grande in modo da poter trascurare i termini con denominatore r^2 nei confronti dei termini con denominatore r, allora il sistema (33) diventa identico al sistema (17) in cui si sia posto $\nu = 0$ e $\gamma = \infty$: quindi per H_θ sono valide espressioni del tipo della (31), a cui corrisponde $v_\theta = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, H_\theta$ e della (32), a cui corrisponde $v_\theta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\, H_\theta$.

Si conclude che a distanza sufficientemente grande anche le componenti trasversali danno luogo ad una propagazione per onde cilindriche nella quale, tenendo presente anche l'apporto delle componenti assiali, il vettore $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_r$ risulta sempre parallelo o antiparallelo al vettore $\boldsymbol{v}$ a seconda che si tratti di un'onda recessiva o progressiva.

8. Calcolo approssimato della pressione e considerazioni energetiche. - La pressione si calcola mediante l'equazione (20). Se r è sufficientemente grande in modo che sia valida l'approssimazione introdotta al numero precedente, si può porre

$$\rho v_\theta^2 - \mu H_\theta^2 = 0$$

e quindi, integrando la (20), si ottiene la relazione

$$p - \rho U + \frac{\mu}{2}(H_\theta^2 + H_z^2) = f(t) \tag{34}$$

in cui la $f(t)$ si esplicita assegnando la pressione in funzione del tempo per un determinato valore di r.

La (34), interpretata dal punto di vista energetico, afferma che la somma della pressione e dell'energia potenziale e magnetica (esclusa quella radiale) non dipende dal posto, purchè la distanza r sia sufficientemente grande nel caso in cui sia $H_\theta \neq 0$.

Essendo poi il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ dato dalla relazione

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}\\ &= -\mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}_r,\end{aligned}$$

l'energia elettrica ha l'espressione

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\mu^2 v^2 H_r^2 = \frac{1}{2}\mu\frac{v^2}{c^2}H_r^2 \qquad \left(c^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}\right).$$

D'altra parte l'energia magnetica radiale è

$$\frac{1}{2}\mu H_r^2.$$

Essendo $H_r = \frac{\lambda}{r}$, le due ultime specie di energia sono trascurabili a distanza sufficientemente grande. L'unica specie di energia che risulta variabile col posto è perciò l'energia cinetica, cioè l'unica forma di energia attuale che entra in gioco ([15]).

([15]) Tale risultato è in accordo con quanto è stato ricavato, senza bisogno di approssimazioni, per i valori medi in un periodo delle dette forme di energia, in campi alternativi piani nel caso in cui sia $\gamma \neq \infty$ e non si

9. Appendice. – Giova rilevare che la presenza del campo magnetico radiale $H_r = \frac{\lambda}{r}$ è essenziale per la mutua influenza fra fenomeni elettromagnetici e fenomeni dinamici. Infatti se, in accordo con la (12) e la (13), si partisse dalle ipotesi che fosse invece

$$H_r \equiv 0 \quad , \quad v_r = \frac{\lambda(t)}{r}$$

con $\lambda(t)$ assegnata, in luogo dei sistemi (17) e (19) si otterrebbero le equazioni

$$\frac{\partial H_\theta}{\partial t} = \frac{1}{\mu\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r H_\theta}{\partial r}\right) - \lambda(t)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}H_\theta\right)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu\gamma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_z}{\partial r}\right) - \frac{\lambda(t)}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial r v_\theta}{\partial t} = \nu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{\lambda(t)}{r}\frac{\partial r v_\theta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) - \frac{\lambda(t)}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}$$

che risultano tutte indipendenti e che traducono la presenza di un moto completamente indipendente dai fenomeni elettromagnetici e di un campo magnetico dipendente solo dall'assegnata $f(t)$, che compare nell'espressione di v_r [16].

trascuri la corrente di spostamento. Si veda R. NARDINI, *Su particolari campi alternativi della magneto-idrodinamica*. Atti Acc. Sc. Torino, *89*, 1954-55, 17-36.

([16]) Notiamo, per inciso, che per $\nu = 0$ e $\gamma = \infty$ di tali equazioni si ricava subito l'integrale generale; è infatti, per esempio,

$$H_z(r,\ t) = \Phi\left[\Lambda(t) - \frac{r^2 - r_0^2}{2}\right]$$

dove Φ è una funzione arbitraria e $\Lambda(t)$ è una primitiva di $\lambda(t)$.

Analoga espressione si ricava per v_z, per $r v_\theta$ e per $\frac{H_\theta}{r}$.