BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI CASTOLDI

Attorno a una teoria sulla interazione tra masse in movimento.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.3, p. 328–331.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_3_328_0>

Attorno a una teoria sulla interazione tra masse in movimento.

Nota di Luigi Castoldi (a Cagliari)

Sunto. - *Si esamina una recente Nota di* S. Melone *sull'argomento del titolo.*

1. In una recente Nota di questo Bollettino [1], S. Melone ha istituito una teoria macroscopica dell'universo materiale, poggiante, sostanziamente, su ipotesi di totale analogia di comportamento tra masse e cariche elettriche, tra campo cinetico-gravitazionale e campo elettromagnetico; col risultato, per così dire, di una universale elettrificazione della realtà fisica.

Di fronte a implicazioni di tale importanza fisica sembra opportuno indagare fin dove pur note e parziali analogie tra materia ed elettricità necessariamente conseguano dai principî (conservazione delle cariche, conservazione delle masse), e precisare come ogni ulteriore identificazione abbia carattere di ipotesi matematica, non necessariamente (e non, di fatto) rispecchiante il diverso comportamento reale di quegli enti.

Ritengo, in tal senso, giustificate talune considerazioni di indole generale che mi propongo di esporre qui di seguito.

2. Poniamoci in una varietà Riemanniana generica R_4 e concepiamo in essa un campo vettoriale I^i a divergenza nulla, per cui è, in altri termini, con derivazione covariante in R_4:

$$\boxed{\Delta_j I^j = 0} . \tag{1}$$

Si sa che, ricorrendo alla densità vettoriale $\mathfrak{I}^i$ definita col porre

$$\begin{cases} \mathfrak{I}^i = \sqrt{|\det(a_{ij})|}\; I^i \\ ds^2 = | a_{ij}\, dx^i\, dx^j | , \end{cases} \tag{2}$$

la relazione (1) può scriversi più semplicemente

$$\partial_j \mathfrak{I}^j = 0. \tag{3}$$

(1) S. Melone, *Sulla interazione di masse in movimento* - Questo Bollettino III, **10**, 68-74 (1955).

Detta poi $\mathcal{E}^{ijhk}$ la densità controvariante quadrupla di Ricci

$$\mathcal{E}_{ijhk} = \begin{cases} 1 \text{ se } (ijhk) \text{ è permutazione di classe pari} \\ -1 \text{ se } (ijhk) \text{ è permutazione di classe dispari} \\ 0 \text{ se } i, j, h, k \text{ non sono tutti distinti} \end{cases} \tag{4}$$

la posizione

$$\mathfrak{J}^i = \mathcal{E}^{ijhk} V_{ihk} \tag{5}$$

definisce univocamente un tensore triplo alternante V_{ihk}.

Con ciò, all'equazione (3) può anche darsi la forma

$$\frac{1}{4!} \mathcal{E}^{ijhk} \partial_i V_{jhk} \equiv \partial_{[i} V_{jhk]} = 0. \tag{6}$$

Un noto risultato della teoria della derivazione esterna assicura allora esistente un tensore doppio alternante U_{hk}, definito a meno di un arbitrario rotore additivo, per cui è

$$V_{jhk} = \partial_{[j} U_{hk]}. \tag{7}$$

Posto ormai

$$\mathfrak{F}^{ij} = \mathcal{E}^{ijhk} U_{hk}, \tag{8}$$

la relazione (5) diventa

$$\mathfrak{J}^i = \partial_j \mathfrak{F}^{ij}, \tag{9}$$

o, passando dalle densità ai corrispondenti tensori,

$$\boxed{I^i = \Delta_j F^{ij}}\,. \tag{10}$$

Il risultato (10) qui richiamato, e dedotto dalla sola ipotesi (1), consente di affermare che *ogni vettore a divergenza nulla in* R_4 *è la divergenza di un conveniente tensore alternante* F^{ij}, *definito a meno di un arbitrario rotore additivo.*

3. Le precedenti generalità sono suscettibili di diverse interpretazioni fisiche.

Se come I^i assumiamo la densità d'impulso materiale nella R_4 rappresentativa dello spazio-tempo relativistico (E_4 pseudo-pitagorica della Relatività ristretta, o autentica R_4 della Relatività generale o di una possibile teoria Riemanniana unitaria (²)), possiamo subito

(²) Mi riferisco a un punto di vista da me sostenuto in « *Relatività Riemanniana unitaria* » in corso di pubblicazione.

affermare esistente, daccordo con S. MELONE, un campo tensoriale alternante F^{ij} (campo gravitazionale-cinematico) definito a meno di un arbitrario rotore additivo e dotato della proprietà di avere I^i per divergenza.

Lo stesso può dirsi se come $\mathfrak{J}^i$ assumiamo la densità di corrente elettrica nella medesima varietà; giacchè in entrambi i significati di $\mathfrak{J}^i$, l'ipotesi (2) non differisce dalla corrispondente classica equazione di continuità, se non per l'interpretazione vettoriale in R_4 degli enti che vi compaiono.

Distinguendo con un asterisco grandezze di campo elettromagnetico da grandezze gravitazionali, avremo ancora un tensore di campo F^{*ij}, definito a meno di un rotore additivo, e soddisfacente la relazione

$$\mathfrak{J}^{*i} = \partial_j \mathfrak{F}^{*ij}. \tag{9'}$$

È notissimo che le equazioni (9') si identificano, a meno della diversa interpretazione tensoriale, col seguente gruppo di equazioni classiche Maxvelliane:

$$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{div} \bar{E} = \rho \\ &\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} . \end{aligned} \right. \tag{11}$$

La densità tensoriale di campo elettromagnetico $\mathfrak{F}^{*ij}$ incorpora, con diversa legge di varianza in R_4. i consueti campi elettrico $\bar{E}$ e magnetico $\bar{H}$. La densità $\mathfrak{J}^{*i}$ di corrente compendia analogamente le densità spaziali di carica e di corrente ρ e $\bar{j}$.

Una ulteriore limitazione per il tensore elettromagnetico è fornita dal rimanente gruppo

$$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{div} \bar{H} = 0 \\ &\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \end{aligned} \right. \tag{12}$$

delle equazioni di MAXWELL, traducentisi in R_4 nelle relazioni di forma covariantiva

$$\boxed{\partial_{[i} \overset{*}{F}_{jk]} = 0} . \tag{13}$$

Importa notare che le equazioni (13) non sono affatto, diversamente da (9'), una necessaria conseguenza dell'ipotesi (1). Per contro, sono imposte al tensore elettromagnetico dal requisito di una corretta e completa descrizione della realtà fisica.

Il campo cinematico-gravitazionale bensì soddisfa necessariamente l'equazione (9), *ma non v'è fatto fisico analogo a quello descritto da* (13) *che gli imponga di obbedire a equazioni di simile forma.*

Il postulato di una analoga limitazione e precisazione per F^{ij}, quale è sostenuto da S. MELONE equivale ad esigere semplicemente identificantisi in tutto i comportamenti della materia e dell'elettricità, nonchè le leggi dei campi ad esse legati. In particolare, tale requisito conduce necessariamente ad una legge di interazione tra masse coincidente colla classica forza di LORENTZ [(22) della Nota citata].

4. Per quanti non si contentano al *quia*, si pone naturalmente il problema di sapere *perchè*, in natura, si verifichi (13) pel tensore di campo elettromagnetico e non per quello cinematico-gravitazionale. Si pone inoltre spontanea la domanda: qual'è, almeno, il significato fisico di quest'ultimo?.

Al secondo quesito è facile rispondere subito. Il tensore cinematico-gravitazionale F^{ij}, non limitato da (13), e pertanto affetto dall'enorme arbitrarietà che gli deriva dall'arbitrario rotore additivo, non possiede di fatto — per ciò stesso — alcun significato fisico preminente. Ciò è conforme ad un ovvio principio gnoseologico, secondo cui la concretezza rappresentativa di un concetto è inversamente commisurata alla vastità e all'arbitrarietà del suo contenuto.

Il primo problema, trova, come è noto, adeguata, se non forse ancora definitiva risposta, nelle richiamate teorie relativistiche unitarie.

Qneste hanno per compito di incorporare nella Geometria dello spazio-tempo [processo di *geometrizzazione* parzialmente realizzato — per la gravitazione — dalla Relatività generale] i campi fisici gravitazionale ed elettromagnetico, e, possibilmente, quant'altri mai vengano di mano in mano scoperti. Tali teorie descrivono correttamente le parti, distinte e inconfondibili, rappresentate nell'universo dalla materia e dall'elettricità.

5. Termino queste brevi note osservando che, col richiedere forma tensoriale (in E_4) alle leggi del campo cinematico-gravitazionale l'Autore della Nota discussa (restrittivamente) si adegua allo spirito della Relatività. Atto, questo, che torna a suo onore, e può, oggi, interpretarsi quale omaggio alla memoria ed all'opera del costruttore, testè scomparso, di quella teoria.