Bollettino
Unione Matematica Italiana

M. Villa, L. Muracchini

L’applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali.

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.3, p. 313–327.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_3_313_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

L'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali.

Nota di M. Villa e di L. Muracchini (a Bologna)

Sunto. - *S'introduce il concetto di applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali e di elemento lineare proiettivo di una trasformazione puntuale.*

1. La teoria proiettiva differenziale delle superficie dello spazio ordinario culmina col concetto di applicabilità proiettiva e di elemento lineare proiettivo (1).

Orbene, come apparirà nel presente lavoro, anche nella teoria proiettiva differenziale delle trasformazioni puntuali fra piani si può introdurre il concetto di applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali e si introduce l'*elemento lineare proiettivo di una trasformazione*, che svolge in questa teoria un ufficio analogo a quello dell'elemento lineare proiettivo delle superficie dello spazio ordinario.

Il problema dell'applicabilità proiettiva di due trasformazioni fra piani, si pone in una forma assai chiara ed intuitiva quando si rappresentino le due trasformazioni su due varietà V_4 di S_8 di Segre (distinte o sovrapposte), in quanto si riduce al problema dell'applicabilità proiettiva di due superficie poste su due varietà di Segre.

(1) Si veda: G. Fubini e E. Čech. *Geometria proiettiva differenziale.* Bologna, Zanichelli Ed., 1926-27; G. Fubini e E. Čech, *Introduction à la Géométrie différentielle des surfaces.* Paris, Gauthier-Villars Ed., 1931.

Nel problema dell'applicabilità proiettiva fra due superficie dello spazio ordinario, intervengono in modo essenziale, come è ben noto, le reti delle curve asintotiche delle due superficie (n. 3). Qui alle reti di curve asintotiche subentrano (n. 5) i tritessuti di curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ esistenti sopra le superficie giacenti sulla V_4 di SEGRE [2], e ciò non deve destar meraviglia in quanto le curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ sono, fra quelle a tre indici, la più immediata estensione delle asintotiche ordinarie.

Nel n. 5 si pone la nozione di applicabilità proiettiva fra due trasformazioni puntuali ricorrendo appunto alle superficie rappresentative sulla V_4 di SEGRE, mentre nel n. 6 si pone tale nozione senza ricorrere ai loro modelli sulla V_4 di SEGRE.

Nei nn. 7, 8 si assegnano le condizioni analitiche per l'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali pervenendo alla nozione di elemento lineare proiettivo di una trasformazione puntuale.

L'elemento lineare proiettivo è dato (n. 8) dalla forma differenziale fratta

$$\Phi = \frac{\omega_2 \overline{\Theta}_1 - \omega_1 \overline{\Theta}_2}{\omega_2 \Omega_1 - \omega_1 \Omega_2}$$

dove $\overline{\Theta}_1$, $\overline{\Theta}_2$ sono forme cubiche e Ω_1, Ω_2 forme quadratiche nelle forme di PFAFF ω_1, ω_2 [3]. Le forme Θ_1, Θ_2, Ω_1, Ω_2 sono assai importanti nella teoria.

E si ha (nn. 9, 10): *condizione necessaria e sufficiente affinchè due trasformazioni puntuali siano proiettivamente applicabili è che esse abbiano lo stesso elemento lineare proiettivo.*

(2) Si veda: M. VILLA e G. VAONA, *Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale.* « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. », (8), 8, 470-476 (1950). Vanno escluse dalle considerazioni fatte le superficie della V_4 di SEGRE che rappresentano le trasformazioni puntuali degeneri e le superficie di VERONESE esistenti su quella varietà. Si veda: M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali degeneri.* « Mem. Acc. Sci. Ist. Bologna », (9), 9, 19-26 (1941-42); M. VILLA, *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale.* « Mem. Acc. Sci. Ist. Bologna », (10), 9, 7-19 (1943).

(3) Le forme Θ_1, Θ_2 sono state introdotte recentemente nel lavoro: M. VILLA, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali,* « Compositio Math. », 12, 137-146 (1954). I risultati di questo lavoro sono stati comunicati anche al Congresso dell'Unione Matematica Internazionale (Amsterdam, 2-9 settembre, 1954).

Si rimandano ad altri lavori vari problemi che sorgono dai concetti introdotti, come pure l'estensione dei concetti stessi alle trasformazioni puntuali fra spazi lineari di dimensione > 2.

2. Prima di ricordare la definizione di applicabilità proiettiva fra due superficie dello spazio ordinario, nella forma che qui interessa, conviene premettere la nozione di *omografia tangente d'ordine* k ad una corrispondenza puntuale fra due superficie e le nozioni di *direzione caratteristica* e di *direzione principale.*

In uno spazio lineare (proiettivo) S_r ad r dimensioni si consideri una superficie Σ e in un altro spazio $\overline{S}_r$ sia pure assegnata una superficie $\overline{\Sigma}$ e fra le due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ si abbia una corrispondenza γ (4). Si possono sempre scegliere i parametri nella rappresentazione parametrica di $\overline{\Sigma}$ in modo che punti delle due superficie P, $\overline{P}$ corrispondenti in γ siano dati dagli stessi valori dei parametri. Si dirà che un'omografia Ω fra gli spazi S_r, $\overline{S}_r$ è tangente d'ordine k (tangente senz'altro per $k=1$) alla corrispondenza γ fra Σ, $\overline{\Sigma}$ nella coppia P, $\overline{P}$ di punti corrispondenti quando ogni curva C tracciata su Σ e passante per P viene mutata da γ e da Ω rispettivamente in due curve $\overline{C}$ e $\overline{C}_0$ che hanno in $\overline{P}$ un contatto *analitico* d'ordine k (almeno e, in generale, esattamente d'ordine k). Può accadere che per curve C la cui tangente in P ha una particolare direzione t le curve $\overline{C}$ e $\overline{C}_0$ abbiano in $\overline{P}$ un contatto *geometrico* oppure anche *analitico* d'ordine superiore a k, in tal caso si dirà rispettivamente che la direzione t tangente in P a Σ (ed anche la direzione $\overline{t}$ tangente in $\overline{P}$ alla $\overline{C}$) è *caratteristica* oppure *principale* relativamente alla trasformazione γ e alla omografia Ω (5).

3. Consideriamo ora il caso in cui sia $r=3$ e le due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ non siano sviluppabili. Com'è ben noto, una corrispondenza γ fra Σ, $\overline{\Sigma}$ si dice che è *asintotica* quando trasforma le curve asintotiche di Σ in quelle di $\overline{\Sigma}$. Ciò posto, un'applicabilità (o deformazione) proiettiva fra due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ di S_3, $\overline{S}_3$ è una corri-

(4) Le funzioni che intervengono nella rappresentazione parametrica delle due superficie s'intende che soddisfano a tutte le condizioni di regolarità (nella regione dove sono definite) che occorrono per le successive considerazioni analitiche.

(5) Si veda, ad esempio: E. Čech, *Géométrîe projéctive différentielle des correspondances entre deux éspaces*, « Čas. pro pest. Mat. a Fys. », 74, 32-48 (1950).

spondenza asintotica fra le due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ per cui esista nella coppia generica P, $\overline{P}$ di punti corrispondenti almeno una omografia tangente (n. 2) per cui le due direzioni asintotiche uscenti da P (da $\overline{P}$) sono caratteristiche (n. 2) ([6]).

4. Quando una trasformazione puntuale T fra due piani π, $\overline{\pi}$ si rappresenta mediante una superficie della V_4 di SEGRE, le coppie di curve caratteristiche dei due piani ([7]) corrispondenti in T, sono rappresentate da curve di V_4 quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ (e inversamente) ([8]). I due tritessuti caratteristici di π, $\overline{\pi}$ (che si corrispondono in T) danno dunque luogo sulla superficie rappresentativa di T ad un tritessuto di curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$.

5. Data una superficie della V_4 di SEGRE, si diranno direzioni quasi-asintotiche uscenti da un punto P della superficie le tre direzioni tangenti in P alle tre curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ uscenti da P. Inoltre: Una corrispondenza puntuale tra due superficie appartenenti a V_4 di SEGRE si dirà corrispondenza *quasi–*

([6]) La definizione di applicabilità proiettiva è del FUBINI. Si veda: G. FUBINI, *Applicabilità proiettiva di due superficie*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », 41, 135-162 (1916). La definizione qui data, equivalente a quella di FUBINI, insieme ad altre, si trova ad esempio nelle op. cit. in ([1]).

([7]) Considerata una trasformazione puntuale fra due piani π, $\overline{\pi}$ in una, coppia (regolare) P, $\overline{P}$ di punti corrispondenti, esistono ∞^2 omografie tangenti (n. 2) e si hanno tre direzioni caratteristiche (n. 2) che sono le stesse per ogni omografia tangente. Vi sono tre omografie per ciascuna delle quali due delle tre direzioni caratteristiche sono principali (tali omografie sono state chiamate *omografie caratteristiche.* Si veda: M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. II. Loro costruzione*, « Accad. Italia Rend. », (7), 4, 1-7 (1943)). A questo riguardo, nel corso del presente lavoro si supporrà sempre verificato il caso generale per cui le direzioni caratteristiche non sono indeterminate e sono distinte. Una curva di π (o di $\overline{\pi}$) si chiama caratteristica quando la tangente in un suo punto generico è una delle tre direzioni caratteristiche uscenti da esso. In ciascuno dei piani π, $\overline{\pi}$ si ha quindi un tritessuto di curve caratteristiche.

([8]) Sopra una varietà V_k $(k > 2)$ di uno spazio S_h si consideri una varietà V_m $(1 < m < k)$. Una curva C appartenente a V_m si dice quasi-asintotica $\gamma_{p,q,s}$ quando in un punto generico della curva lo spazio congiungente l'$S(p)$-osculatore alla V_k, l'$S(q)$-osculatore a V_m e l'$S(s)$-osculatore a C ha dimensione minore dell'ordinaria. Si veda: M. VILLA e G. VAONA, op. cit. in ([2]).

asintotica quando muta il tritessuto di $\gamma_{1,2,3}$ dell'una in quello dell'altra.

Date due varietà V_4. V_4' di SEGRE appartenenti rispettivamente a due spazi S_8, S_8', tra le omografie fra S_8, S_8' consideriamo quelle che mutano V_4 in V_4' ed inoltre che trasformano una delle due schiere di piani di V_4 in una prefissata schiera di piani di V_4'. Questo insieme ∞^{16} di omografie s'indicherà con I (9).

Ciò posto, poniamo la seguente definizione:

Una corrispondenza puntuale Γ *fra due superficie* Σ, Σ' *situate su* V_4 *di Segre si dirà un' applicabilità proiettiva quando é quasi-asintotica ed esiste nella coppia generica* P, P' *di punti corrispondenti e per ognuna delle tre coppie di direzioni quasi-asintotiche uscenti da* P (P'), *almeno un'omografia tangente dell' insieme* I *per cui quelle due direzioni sono caratteristiche* (10).

Si osservi che se due superficie situate su V_4 di SEGRE sono proiettivamente applicabili in relazione all' insieme I lo sono anche rispetto all' altro insieme I' di omografie in quanto una superficie Σ della V_4 di SEGRE e una sua trasformata Σ_0 da un' omografia Ω' di I' (di I) sono proiettivamente applicabili in relazione all' insieme I (I').

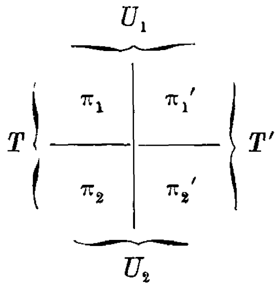
6. È manifestamente desiderabile porre la definizione di applicabilità proiettiva fra due trasformazioni puntuali senza ricorrere ai loro modelli sulla varietà di SEGRE.

Sia dunque T una trasformazione puntuale fra i piani π_1, π_2

(9) Se la V_4 rappresenta le coppie di punti dei due piani π_1, π_2 e la V_4' le coppie di punti dei due piani π_1', π_2' una omografia che muta V_4 in V_4' si ottiene assegnando una omografia Ω_1 fra i piani π_1, π_1' e una omografia Ω_2 fra i piani π_2, π_2' ma si ottiene anche assegnando un'omografia Ω fra i piani π_1, π_2' e un'omografia Ω_0 fra i piani π_2, π_1'. Si hanno quindi due insiemi di omografie che mutano V_4 in V_4', ciascuno costituito da ∞^{16} omografie. Se le omografie di un insieme mutano la prima schiera di piani di V_4 nella prima schiera di piani di V_4', le omografie dell'altro insieme mutano la prima schiera di piani di V_4 nella seconda schiera di piani di V_4'. I è pertanto uno qualunque dei due insiemi suddetti.

(10) Nel lavoro: M. VILLA e L. MURACCHINI, *Sulle corrispondenze fra superficie della varietà di Segre*, vol. della Unione Matematica Argentina dedicato a Beppo LEVI, 1955, si dimostra che: una corrispondenza Γ fra due superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ situate rispettivamente su due varietà di SEGRE V_4, $\bar{V}_4$ di S_8, $\bar{S}_8$, in una coppia di punti corrispondenti P. $\bar{P}$, possiede al più tre coppie di direzioni che sono caratteristiche in relazione a qualche omografia tangente dell'insieme I (se Γ ha in P, $\bar{P}$ comportamento quasi-

e T' una trasformazione puntuale fra i piani π_1', π_2'. Una corrispondenza γ fra T, T' consisterà di una trasformazione U_1 fra i piani π_1, π_1' e di una trasformazione U_2 fra i piani π_2, π_2', quest'ultima però essendo indotta da T, T', U_1($U_2 = T \cdot U_1 \cdot T'$).



Ebbene la definizione posta nel n. 5 di applicabilità proiettiva si può esprimere così:

Data una trasformazione puntuale T *fra i piani* π_1, π_2 *e una trasformazione puntuale* T$'$ *fra i piani* π_1', π_2', *una corrispondenza* γ *fra* T *e* T$'$ *(consistente in una trasformazione* U$_1$ *fra* π_1, π_1' *e nella trasformazione* U$_2$ *indotta fra* π_2, π_2'*) si dirà un' applicabilità proiettiva se i tritessuti caratteristici di* U$_1$, U$_2$ *nei quattro piani coincidono coi tritessuti caratteristici di* T, T$'$.

Infatti affinchè la corrispondenza puntuale Γ fra le superficie Σ, Σ' rappresentative di T, T' sulla V_4 di SEGRE sia quasi-asintotica (n. 5) è necessario (e sufficiente) che i tritessuti caratteristici K_1, K_2 di T siano trasformati in quelli K_1', K_2' di T' rispettivamente dalle trasformazioni U_1, U_2. Affinchè poi (n. 5) nella coppia generica P, P' di punti corrispondenti in Γ di Σ, Σ' e per ognuna delle tre coppie di direzioni quasi-asintotiche uscenti da P (P'), esista un'omografia (di I) tangente a Γ per cui quelle due direzioni sono caratteristiche, è necessario che nella coppia generica di punti corrispondenti A, A' in U_1 (B, B' in U_2) e per ognuna delle tre coppie di rette tangenti in A (in B) alle tre curve di K_1 (di K_2) esista un' omografia tangente in A, A' (in B, B') a U_1 (a U_2) per cui quelle due direzioni sono caratteristiche (n. 2) ([11]).

D'altra parte se una trasformazione puntuale $\bar{T}$ fra due piani π, π' muta un tritessuto K di π in un tritessuto K' di π' in guisa che nella coppia generica Q, Q' di punti corrispondenti e per ognuna delle tre coppie di rette tangenti in Q alle tre curve di K esiste un' omografia tangente in Q, Q' a $\bar{T}$ per cui quelle due direzioni

asintotico possono però essere infinite). Un' omografia dell' insieme I tangente in P, $\bar{P}$ dà luogo al più a due coppie di direzioni caratteristiche (se Γ ha in P, $\bar{P}$ comportamento quasi-asintotico può dar luogo però ad infinite coppie).

([11]) Appare infatti nell' op. cit. in ([10]), che: se per un'omografia di I tangente a Γ due direzioni sono caratteristiche, le direzioni dei piani di cui le prime sono le immagini sulla varietà di SEGRE, sono caratteristiche per le omografie fra quei piani di cui l' omografia di I è l'immagine *(ma non viceversa)*.

sono caratteristiche, allora i tritessuti K, K' sono i tritessuti caratteristici di $\overline{T}$. Si conclude che i tritessuti caratteristici di U_1, U_2 nei quattro piani devono coincidere coi tritessuti caratteristici di T, T'.

Inversamente, se i tritessuti caratteristici di U_1, U_2 coincidono con quelli di T, T' allora la corrispondenza Γ è intanto quasi-asintotica. D'altra parte, in relazione ad una generica coppia di punti corrispondenti in U_1 (e alla relativa coppia di U_2) esistono le tre omografie caratteristiche per ognuna delle quali due delle tre direzioni caratteristiche sono principali ([12]). Per ognuna delle omografie di I immagini di una coppia di omografie caratteristiche due delle tre direzioni quasi-asintotiche sono dunque principali ([13]) e quindi caratteristiche ([14]), ([15]).

Dal teorema ora dimostrato risulta evidente quanto è stato osservato alla fine del n. 5. Infatti se la superficie Σ ivi considerata rappresenta sulla V_4 di SEGRE la trasformazione T, la superficie Σ_0 rappresenta la trasformazione $T' = K_2 \cdot T \cdot K_1$, essendo K_1 un'omografia (ad es.) fra π_1, π_2' e K_2 un'omografia fra π_2, π_1'. La corrispondenza $U_1 = T \cdot K_2$ (sicchè $U_2 = T \cdot K_1$) è un'applicabilità proiettiva fra T, T' in quanto i tritessuti caratteristici di U_1, U_2 sono manifestamente gli stessi di quelli di T, T'.

7. Cerchiamo ora qual'è la condizione analitica per l'applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali. Si perverrà alla nozione di *elemento lineare proiettivo* di una trasformazione (n. 8)

([12]) Che sono le tangenti alle curve del tritessuto passanti per i punti.

([13]) Se per un'omografia di I tangente a Γ due direzioni sono principali, le direzioni di cui esse sono le immagini sono principali per le omografie fra i piani, e viceversa.

([14]) La definizione di applicabilità proiettiva di due trasformazioni puntuali data in L. MURACCHINI, *Sulla deformazione proiettiva delle trasformazioni puntuali*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), 7, 29-38 (1952), è equivalente, come è subito visto, a quella data qui; basta tenei presenti le definizioni del n. 2. Il richiedere, come ivi è fatto, che le omografie tangenti alle corrispondenze che qui chiamiamo U_1, U_2 realizzino inoltre l'eguaglianza degli intorni del secondo ordine delle trasformazioni T, T' è superfluo. A causa di errori di calcolo commessi nell'ultima parte di quella Nota l'elemento lineare proiettivo indicato ivi non è corretto; esso va sostituito con quello che viene introdotto nel presente lavoro, fatti i dovuti cambiamenti di riferimenti.

([15]) Segue che affinchè due trasformazioni puntuali T, T' siano proiettivamente applicabili è necessario, ma ovviamente non sufficiente, che i tritessuti caratteristici di T, T' siano topologicamente equivalenti.

che svolge nella teoria delle trasformazioni puntuali un ufficio analogo a quello dell'elemento lineare proiettivo nella teoria proiettiva differenziale delle superficie dello spazio ordinario (n. 9).

Una trasformazione puntuale T tra due piani π_1, π_2 è determinata se si conoscono le espressioni delle coordinate omogenee del punto A di π_1 e quelle delle coordinate omogenee del punto corrispondente B di π_2 in funzioni (che supponiamo analitiche) di due parametri u, v (che diremo principali). Per tutti i valori considerati di u, v si supporrà

$$\left| A \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial A}{\partial v} \right| \neq 0 \quad , \quad \left| B \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial B}{\partial v} \right| \neq 0 .$$

Nel piano π_1 si assumono come punti fondamentali del riferimento mobile il punto A e due punti arbitrari A_1, A_2. Nel piano π_2 si assumono come punti fondamentali del riferimento mobile il punto B e i corrispondenti B_1, B_2 di A_1, A_2 in una prefissata omografia tangente Ω. Si hanno le equazioni fondamentali

$$(1) \qquad \begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2 \\ dA_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 \\ dA_2 &= \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 \\ dB &= \bar{\omega}_{00}B + \bar{\omega}_{01}B_1 + \bar{\omega}_{02}B_2 \\ dB_1 &= \bar{\omega}_{10}B + \bar{\omega}_{11}B_1 + \bar{\omega}_{12}B_2 \\ dB_2 &= \bar{\omega}_{20}B + \bar{\omega}_{21}B_1 + \bar{\omega}_{22}B_2 \end{aligned}$$

le ω_{ik}, $\bar{\omega}_{ik}(i, k = 0, 1, 2)$ essendo forme di PFAFF in u, v e nei 10 parametri secondari. Le equazioni di struttura del gruppo proiettivo sono

$$(2) \qquad \begin{aligned} \omega'_{ik} &= [\omega_{i0}\omega_{0k}] + [\omega_{i1}\omega_{1k}] + [\omega_{i2}\omega_{2k}] \\ \bar{\omega}'_{ik} &= [\bar{\omega}_{i0}\bar{\omega}_{0k}] + [\bar{\omega}_{i1}\bar{\omega}_{1k}] + [\bar{\omega}_{i2}\bar{\omega}_{2k}] \end{aligned}$$

$(0 \leq i, k \leq 2)$, indicando con $[\omega_{i0}\omega_{0k}]$ il prodotto esterno delle due forme ω_{i0}, ω_{0k} e analogamente, e con ω' la derivata esterna di ω.

Fra le 18 forme di PFAFF ω_{ik}, $\bar{\omega}_{ik}$ esistono 6 relazioni lineari che si ottengono esprimendo che i punti B_1, B_2 sono i corrispondenti di A_1, A_2 in Ω. Si ha ([16])

$$(3) \qquad \omega_{01} = \bar{\omega}_{01} \quad , \quad \omega_{02} = \bar{\omega}_{02} .$$

([16]) Si veda il lavoro citato in ([3]).

Le 4 relazioni lineari rimanenti si ottengono derivando esternamente le (3).

Poniamo

$$\omega_{01} = \omega_1 \quad , \quad \omega_{02} = \omega_2$$

ed osserviamo che ω_1, ω_2 dipendono dai differenziali dei soli parametri principali.

Poniamo inoltre

$$\tau_{ik} = \bar{\omega}_{ik} - \omega_{ik} .$$

Derivando esternamente le (3), per le (2), si ottiene

$$[\omega_1, \tau_{11} - \tau_{00}] + [\omega_2 \; \tau_{21}] = 0$$
$$[\omega_1 \; \tau_{12}] + [\omega_2, \tau_{22} - \tau_{00}] = 0.$$

Per un classico lemma di CARTAN ([17]) si conclude che esistono due forme quadratiche

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Omega_1 &= c^1_{11}\omega_1^2 + 2c^1_{12}\omega_1\omega_2 + c^1_{22}\omega_2^2 \\ \Omega_2 &= c^2_{11}\omega_1^2 + 2c^2_{12}\omega_1\omega_2 + c^2_{22}\omega_2^2 \end{aligned}$$

tali che

$$(5) \qquad \begin{aligned} \tau_{11} - \tau_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\omega_1} \\ \tau_{21} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\omega_2} \\ \tau_{12} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\omega_1} \\ \tau_{22} - \tau_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\omega_2} . \end{aligned}$$

Queste sono le quattro ulteriori relazioni lineari fra le ω_{ik}, $\bar{\omega}_{ik}$.

Le forme Ω_1, Ω_2, come le forme cubiche Θ_1, Θ_2 di cui ora diremo, hanno importanza fondamentale nella teoria che stiamo svolgendo.

Si osservi che le ω_1, ω_2 si possono considerare come coordinate proiettive omogenee di retta nel fascio A, individuata dai punti A e $\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2$, ossia da A e dA. E così la ω_1, ω_2 si possono considerare come coordinate proiettive omogenee di retta nel fascio B ([18]). L'equazione delle direzioni caratteristiche è

$$\omega_1\Omega_2 - \omega_2\Omega_1 = 0.$$

([17]) Si veda il lavoro citato in ([3]).

([18]) Se alla retta (ω_1, ω_2) si fa corrispondere la retta (Ω_1, Ω_2), dove Ω_1, Ω_2 sono date dalle (4), si ha fra i fasci A, B la corrispondenza lineariz-

Particolarizziamo ora ulteriormente i riferimenti, assumendo i punti A_1, A_2 su due rette caratteristiche t_1, t_2 uscenti da A e come omografia tangente Ω l'omografia caratteristica relativa alle rette t_1, t_2. Ciò implica $c^1_{11} = c^1_{22} = c^2_{11} = c^2_{22} = 0$. Con ulteriore particolarizzazione del riferimento si ha $c^1_{11} = c^2_{12} = -1$ (sicchè $\Omega_1 = \Omega_2 = -2\omega_1\omega_2$). Le (5) divengono

$$
\begin{aligned}
\tau_{11} - \tau_{00} &= -\omega_2 \\
\tau_{21} &= -\omega_1 \\
\tau_{12} &= -\omega_2 \\
\tau_{22} - \tau_{00} &= -\omega_1 .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Fra le ω_{ik} $\bar{\omega}_{ik}$ esistono 6 nuove relazioni. Per ottenerle deriviamo esternamente le (6). Si ottiene

$$
\begin{aligned}
&[(2\omega_{12} - 2\tau_{10} - \omega_2)\omega_1] + [(\omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{21} - \tau_{20})\omega_2] = 0 \\
&[(\omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{21} - \tau_{20})\omega_1] + [(2\omega_{21} - \omega_1)\omega_2] = 0 \\
&[(2\omega_{12} - \omega_2)\omega_1] + [(\omega_{11} - \omega_{00} - \omega_{12} - \tau_{10})\omega_2] = 0 \\
&[(\omega_{11} - \omega_{00} - \omega_{12} - \tau_{10})\omega_1] + [(2\omega_{21} - 2\tau_{20} - \omega_1)\omega_2] = 0.
\end{aligned}
$$

Per il suddetto lemma di CARTAN, si conclude che esistono due forme cubiche

$$
\begin{aligned}
\Theta_1 &= \alpha_{30}\omega_1^3 + 3\alpha_{21}\omega_1^2\omega_2 + 3\alpha_{12}\omega_1\omega_2^2 + \alpha_{03}\omega_2^3 \\
\Theta_2 &= \beta_{30}\omega_1^3 + 3\beta_{21}\omega_1^2\omega_2 + 3\beta_{12}\omega_1\omega_2^2 + \beta_{03}\omega_2^3
\end{aligned}
\tag{7}
$$

tali che

$$
\begin{aligned}
2\omega_{12} - 2\tau_{10} - \omega_2 &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_1^2} \\
\omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{21} - \tau_{20} &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_1\partial\omega_2} \\
2\omega_{21} - \omega_1 &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\omega_2^2} \\
2\omega_{12} - \omega_2 &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_1^2} \\
\omega_{11} - \omega_{00} - \omega_{12} - \tau_{10} &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_1\partial\omega_2} \\
2\omega_{21} - 2\tau_{20} - \omega_1 &= \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\omega_2^2} .
\end{aligned}
\tag{8}
$$

zante relativa alla trasformazione T e alla omografia Ω. Si veda: M. VILLA, op. cit. in (3).

Sono queste le 6 relazioni cercate.

Indicando con δ un simbolo di differenziazione rispetto ai due parametri secondari che sono rimasti, si trova

$$\delta\alpha_{30} = \delta\alpha_{03} = \delta\beta_{30} = \delta\beta_{03} = \delta(\alpha_{12} + \alpha_{21}) = \delta(\beta_{12} + \beta_{21}) = 0.$$

Segue che *la forma differenziale fratta*

$$\Phi = \frac{\alpha_{03}\omega_2{}^4 + (3\alpha_{12} + 3\alpha_{21} + \alpha_{03} - 3\beta_{12} - 3\beta_{21} - \beta_{03})\omega_1{}^2\omega_2{}^2 - \beta_{30}\omega_1{}^4}{\omega_2\Omega_1 - \omega_1\Omega_2} \tag{9}$$

è invariante.

Le forme Θ_1, Θ_2 dipendono invece dai vertici A_1, A_2 del riferimento mobile (cioè dai due parametri secondari).

Fisseremo ora intrinsecamente i punti A_1, A_2.

Se alla retta (ω_1, ω_2) si fa corrispondere la retta (Θ_1, Θ_2), dove Θ_1, Θ_2 sono date dalle (7). si ha fra i fasci A, B la corrispondenza linearizzante relativa alla trasformazione T e alla trasformazione quadratica osculatrice (t. q. o.) che ha per punti singolari sulle rette caratteristiche t_1, t_2 i quarti armonici di A dopo A_1, I_1 oppure A_2, I_2 rispettivamente, I_1, I_2 essendo le intersezioni della retta unità rispettivamente con t_1, t_2 ([19]).

La rette unite di tale corrispondenza — vale a dire le direzioni d'iperosculazione di T e della t. q. o. ([20]) — sono

$$\omega_2\Theta_1 - \omega_1\Theta_2 = 0. \tag{10}$$

Variando A_1, A_2 su t_1, t_2 varia la t. q. o. e si ottengono le ∞^2 t. q. o. in (A, B) a T ([21]). Fra queste t. q. o. ve n'è una per cui le quattro rette (10) sono distribuite in due coppie separate armonicamente dalle rette t_1, t_2.

Se S_1, S_2 sono i punti singolari di questa t.q.o. sulle due rette caratteristiche t_1, t_2, i punti $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ di t_1, t_2 per cui $(AS_1I_1\bar{A}_1) = -1$, $(AS_2I_2\bar{A}_2) = -1$ sono intrinsecamente individuati. Il riferimento avente per vertici $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ è intrinseco. In esso le quattro rette (10)

([19]) Si veda: M. VILLA, op. cit. in ([1]).

([20]) Si veda: M. VILLA, *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), 2, 188-195 (1947).

([21]) Si veda: M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. I. Le proiettività caratteristiche. II. Loro costruzione*, « Accad. Italia Rend. », (7), 3 e 4, 718-724, 1-7 (1942-43).

sono distribuite in due coppie separate armonicamente dalle rette t_1, t_2 e ciò implica

$$\alpha_{30} = 3\beta_{21}, \qquad \beta_{03} = 3\alpha_{12}.$$

Le forme Θ_1, Θ_2 divengono

$$(11) \qquad \begin{cases} \overline{\Theta_1} = \alpha_{30}\omega_1^3 + 3\alpha_{21}\omega_1^2\omega_2 + 3\alpha_{12}\omega_1\omega_2^2 + \alpha_{03}\omega^3{}_2 \\ \overline{\Theta_2} = \beta_{30}\omega_1^3 + \alpha_{30}\omega_1^2\omega_2 + 3\beta_{12}\omega_1\omega_2^2 + 3\alpha_{12}\omega_2^3. \end{cases}$$

8. La forma differenziale fratta Φ si può scrivere per le (11)

$$(12) \qquad \Phi = \frac{\omega_2\overline{\Theta_1} - \omega_1\overline{\Theta_2}}{\omega_2\Omega_1 - \omega_1\Omega_2}.$$

La Φ si dirà *elemento lineare proiettivo* della trasformazione puntuale T ([22]).

Si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due trasformazioni puntuali T, T′ *siano proiettivamente applicabili è che esse abbiano lo stesso elemento lineare proiettivo.*

9. Prima di dimostrare la proprietà ora enunciata, determiniamo le equazioni di PFAFF a cui debbono soddisfare due trasformazioni proiettivamente applicabili.

Sia dunque data la trasformazione puntuale T fra i piani π_1, π_2 e una trasformazione puntuale T' fra i piani π_1', π_2'.

Le T, T' siano proiettivamente applicabili e sia γ un'applicabilità proiettiva fra T, T'. La corrispondenza γ consiste in una trasformazione U_1 fra π_1, π_1' e nella trasformazione indotta $U_2 = T \cdot U_1 \cdot T'$ fra i piani π_2, π_2'.

Abbiamo indicato con A, B due punti di π_1, π_2 corrispondenti in T e siano A', B' due punti rispettivamente di π_1', π_2' corrispondenti in T', tali che A, A' si corrispondano in U_1 (e quindi B, B' in U_2). Possiamo scegliere in π_1' un riferimento mobile formato dai punti A', A_1', A_2', dove A_1', A_2' sono i corrispondenti dei punti A_1, A_2 di π_1 (n. 7) in una omografia tangente ad U_1 in A, A'. In π_2' assumiamo il riferimento mobile B', B_1', B_2' dove B_1', B_2' sono determinati in relazione alla T', in modo analogo a B_1, B_2 in

([22]) È ovvio che la forma Φ dipende dalla scelta di due delle tre rette caratteristiche (quelle su cui sono stati presi i punti A_1, A_2).

relazione a T (n. 7) ([23]). Segue che i punti B_1', B_2' corrispondono ai punti B_1, B_2 di π_2 in una omografia tangente ad U_2 in B, B'.

Per la T si hanno le (1), (6) del n. 7 e per la T' si hanno le relazioni analoghe alle (1), (6):

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
dA' &= \omega_{00}^* A' + \omega_1^* A_1' + \omega_2^* A_2' \\
dA_1' &= \omega_{10}^* A' + \omega_{11}^* A_1' + \omega_{12}^* A_2' \\
dA_2' &= \omega_{20}^* A_{,} + \omega_{21}^* A_1' + \omega_{22}^* A_2' \\
dB' &= \bar{\omega}_{00}^* B' + \omega_1^* B_1' + \omega_2^* B_2' \\
dB_1' &= \bar{\omega}_{10}^* B' + \bar{\omega}_{11}^* B_1' + \bar{\omega}_{12}^* B_2' \\
dB_2' &= \bar{\omega}_{20}^* B' + \bar{\omega}_{21}^* B_1' + \bar{\omega}_{22}^* B_2'
\end{aligned}
$$

dove $(\tau_{ik}^* = \bar{\omega}_{ik}^* - \omega_{ik}^*)$

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
\tau_{11}^* - \tau_{00}^* &= -\omega_2^* \\
\tau_{21}^* &= -\omega_1^* \\
\tau_{12}^* &= -\omega_2^* \\
\tau_{22}^* - \tau_{00}^* &= -\omega_1^* .
\end{aligned}
$$

Ma, per il legame fra i riferimenti in π_1 e in π_1', si ha

$$
(15)\qquad \omega_1 = \omega_1^* \quad , \quad \omega_2 = \omega_2^* .
$$

Da queste, derivando esternamente, si ottiene $(\rho_{ik} = \omega_{ik}^* - \omega_{ik})$

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
\rho_{11} - \rho_{00} &= d_{11}\omega_1 + d_{12}\omega_2 \\
\rho_{21} &= d_{12}\omega_1 + d_{22}\omega_2 \\
\rho_{12} &= e_{11}\omega_1 + e_{12}\omega_2 \\
\rho_{22} - \rho_{00} &= e_{12}\omega_1 + e_{22}\omega_2
\end{aligned}
$$

d, e coefficienti opportuni.

D'altra parte le direzioni caratteristiche della trasformazione T nella coppia (A, B) sono

$$
(17)\qquad \omega_1\omega_2(\omega_1 - \omega_2) = 0.
$$

([23]) Poichè γ è per ipotesi una applicabilità proiettiva, alle direzioni caratteristiche uscenti da A (da B) della T fa corrispondere le direzioni caratteristiche di T' uscenti da A' (da B'). Si constata allora con un semplice computo di parametri che, avendo scelto i riferimenti in π_1, π_2 in modo che valgano le (6), si possono scegliere riferimenti in π_1', π_2' che siano corrispondenti dei primi in omografie tangenti alla U_1 [alla U_2] in (A, A') [in (B, B')] e valgano per essi le (14).

E questa è pure l'equazione delle direzioni caratteristiche della trasformazione T' nella coppia (A', B').

Le direzioni caratteristiche della trasformazioni U_1 nella coppia (A, A') sono

$$e_{11}\omega_1^3 + (2e_{12} - d_{11})\omega_1^2\omega_2 + (e_{22} - 2d_{12})\omega_1\omega_2^2 - d_{22}\omega_2^3 = 0. \tag{18}$$

E questa è pure l'equazione delle direzioni caratteristiche della trasformazione U_2 nella coppia (B, B').

Affinchè la corrispondenza γ sia un'applicabilità proiettiva (n. 6) è necessario e sufficiente che le curve caratteristiche di U_1 (e quindi anche quelle di U_2) coincidano con le curve caratteristiche di T(o di T')

Per le (17), (18) ciò implica

$$e_{11} = 0 \quad , \quad d_{22} = 0 \quad , \quad 2d_{12} + d_{11} = 2e_{12} + e_{22}. \tag{19}$$

Per le (16), (19) si conclude che affinchè le trasformazioni T, T' siano proiettivamente applicabili devono sussistere, accanto alle (6), (14), (15) le equazioni di PFAFF

$$\begin{gathered} \rho_{21} = h\omega_1 \\ \rho_{12} = k\omega_2 \\ \rho_{11} - \rho_{22} + \rho_{21} - \rho_{12} = l(\omega_1 - \omega_2) \end{gathered} \tag{20}$$

avendo posto $h = d_{12}$, $k = e_{12}$, $l = d_{11} - e_{12} + d_{12}$.

10. Possiamo ora dimostrare il teorema enunciato nelle ultime righe del n. 8. Dimostriamo dapprima che la condizione è necessaria. Infatti, indicando con α^*, β^* le espressioni analoghe per la trasformazione T' delle α, β che appaiono nelle (7), (8) relative alla T, dalle (20) si ha

$$\begin{gathered} \alpha_{03} = \alpha^*_{03} \\ \beta_{30} = \beta^*_{30} \\ 3\alpha_{12} + 3\alpha_{21} + \alpha_{30} - 3\beta_{12} - 3\beta_{21} - \beta_{03} = 3\alpha^*_{12} + 3\alpha^*_{21} + \alpha^*_{30} - 3\beta^*_{12} - 3\beta^*_{21} - \beta^*_{03} \end{gathered} \tag{21}$$

e quindi gli elementi lineari proiettivi (9) sono uguali.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente.

Consideriamo dunque due trasformazioni T e T' e fra di esse una corrispondenza γ tale che gli elementi lineari relativi a coppie di T e T' che si corrispondono in γ siano uguali. Fissati per

T e T' i riferimenti come nel n. 7, per coppie corrispondenti in γ deve cioè essere per la (9), (12)

$$\frac{\alpha_{03}\omega_2^4 + (3\alpha_{12} + 3\alpha_{21} + \alpha_{30} - 3\beta_{12} - 3\beta_{21} - \beta_{03})\omega_1^2\omega_2^2 - \beta_{30}\omega_1^4}{\omega_1\omega_2(\omega_1 - \omega_2)} =$$

$$= \frac{\alpha_{03}^*\omega_2^{*4} + (3\alpha_{12}^* + 3\alpha_{21}^* + \alpha_{30}^* - 3\beta_{12}^* - 3\beta_{21}^* - \beta_{03}^*)\omega_1^{*2}\omega_2^{*2} - \beta_{30}^*\omega_1^{*4}}{\omega_1^*\omega_2^*(\omega_1^* - \omega_2^*)}.$$

Ora questa relazione implica

$$\omega_1 = \omega_1^*, \qquad \omega_2 = \omega_2^* \text{ (}^{24}\text{)}.$$

Dovranno perciò sussistere le (21).

Siccome le (6), (14) sussistono già, per la scelta fatta dei riferimenti e per le (22), dalle relazioni ottenute per differenziazione esterna delle (22), per le (21) seguono le (20). Il teorema è così dimostrato ([25]) ([26]).

([24]) Infatti per la corrispondenza che intercede fra T e T' si deve avere $\omega_1^* = a\omega_1 + b\omega_2$, $\omega_2^* = c\omega_1 + d\omega_2$, con $ad - bc \neq 0$. Sostituendo queste espressioni delle ω_1^*, ω_2^* nella forma Φ^* e scrivendo che il risultato della sostituzione è identico alla forma Φ si vede subito che deve essere $\omega_1^* = \omega_1$, $\omega_2^* = \omega_2$ oppure $\omega_1^* = \omega_2$, $\omega_2^* = \omega_1$. Ma scambiando i due indici 1 e 2 dappertutto, questo secondo caso si riduce al primo.

([25]) Per verificare se una corrispondenza γ è un'applicabilità proiettiva di due trasformazioni vanno ovviamente confrontate forme Φ relative a coppie di direzioni cararatteristiche [si veda la ([22])] corrispondenti in γ (Ciò del resto appare nella dimostrazione del testo).

([26]) Come esempi di trasformazioni proiettivamente applicabili indichiamo i seguenti. Anzitutto le trasformazioni puntuali le cui curve caratteristiche dei tre sistemi sono rette. Per una trasformazione cosiffatta (e solo in tale caso) l'elemento lineare proiettivo svanisce identicamente; pertanto se due trasformazioni hanno le curve caratteristiche dei tre sistemi che sono rette, qualsiasi possibile corrispondenza γ fra le due trasformazioni in cui si corrispondano le curve (rette) caratteristiche risulterà un'applicabilità proiettiva. Un altro esempio è il seguente (le curve caratteristiche delle due trasformazioni non sono tutte rette):

$$T\left\{\begin{array}{ll} x = u, & \bar{x} = u^3 \\ y = v, & \bar{y} = v^4, \end{array}\right. \qquad T'\left\{\begin{array}{ll} x = u^7, & \bar{x} = u \\ y = v^{10}, & \bar{y} = v. \end{array}\right.$$