Bollettino
Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* B. Finzi, Teoria dei Campi, Tamburini, Milano, 1954 (Paolo Udeschini)
* Francesco G. Tricomi, Funzioni ipergeometriche confluenti, Edizioni Cremonese, Roma, 1954 (Aldo Guzzetti)
* M. Piazzolla-Beloch, Lezioni di Matematica complementare (La Matematica elementare vista dall'alto), Istituto di Geometria dell'Università di Ferrara, 1953 (Luigi Muracchini)
* A. Denjoy, Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse, Gathier-Villars, Paris, 1951 (Tullio Viola)
* Die Hauptreferate des 8. polnischen Mathematikercongress (6-12. September 1953 in Warschau), Deutscher Verlag der Wissenschaften
* Cristobal de Losada y Puga, Curso de Análisis Matemático, T. I, II ed., 1951, T. 2, II ed., 1953, T. 3, 1954 (Giovanni Sansone)
* Ralph Philip Boas jr., Entire functions, Academic Press, New York, 1954 (Giuseppe Belardinelli)
* Otto-Heinrich Keller, Geometrie der Zahlen, Teubner, Leipzig, 1954 (Marco Cugiani)
* K. Yano, Gruppi di trasformazioni in spazi geometrici differenziabili, Istituto Matematico, Roma, 1954 (Carmelo Longo)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 268–285.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_268_0>

RECENSIONI

B. Finzi, *Teoria dei campi.* Lezioni di fisica matematica tenute all'Università di Milano nell'anno accademico 1953-54 raccolte dal dott. B. Todeschini - Tamburini, Milano 1954.

Fra i concetti più felici e fecondi che sono stati introdotti nello studio matematico dei fenomeni fisici si annovera certamente quello di « campo ».

Esso si adegua opportunamente anche alle più moderne teorie fisiche, ove trova numerose interessanti applicazioni.

Dalla più intuitiva nozione di campo, che sorge spontanea dallo studio dei corpi deformabili continui, come il campo cinetico di un fluido e quello degli sforzi e delle deformazioni di un corpo elastico, si passa alla nozione meno intuitiva di campo non riferita ad un corpo materiale, ma riferita allo spazio stesso che ne è sede: campo gravitazionale, campo elettrico, campo magnetico, campo elettromagnetico, campo mesonico, ecc.

E generalizzando ancora si perviene alla nozione di campo nello spazio-tempo, nello spazio delle fasi... insomma il « campo » tiene felicemente il passo con il continuo progredire scientifico.

Manifesta è l'utilità, se non la necessità, per chi si appresta allo studio di questioni fisiche, di impadronirsi dei metodi adatti alla trattazione analitica della teoria dei campi, siano essi scalari, vettoriali, tensoriali, così da potersi addentrare nei vari rami d'indagine scientifica.

Anche in tempi non recenti i cultori di fisica matematica si occuparono ampiamente di tale teoria, se pure, come è naturale, secondo le assai più limitate esigenze e conoscenze fisiche del passato e ne fa testimonianza ad esempio, il grande sviluppo dell'ormai classica teoria del potenziale.

Per seguire l'evoluzione della scienza, la teoria dei campi deve ampliarsi per permettere alla nostra mente di adeguarsi alla sempre crescente molteplicità e complessità dei fenomeni, quali via via vengono rivelati dall'osservazione sperimentale, o rappresentati nei vari schemi teorici.

Il recente volume di Finzi risponde proprio a queste esigenze, e permette, per così dire, di fare un pò il punto sullo stato attuale della teoria dei campi e delle sue principali applicazioni.

Per quanto vastissimi siano gli argomenti che investe la teoria in parola, pure si può averne una sicura, chiara, talvolta suggestiva, visione panoramica attraverso alla lettura del volume di Finzi, ove sono abilmente rinserrati, in rapida sintesi, i principali campi di cui tratta la moderna fisica matematica.

Nella sua limpida esposizione, Finzi apporta anche qualche originale contributo: desidero segnalare in modo particolare, nell'ultima parte del volume, il capitolo XII dedicato ai campi della meccanica analitica, per l'originalità e novità di trattazione.

Il volume raccoglie un ciclo di lezioni di fisica matematica tenute all'Università di Milano nell'anno accademico 1953-54, lezioni che sono state fedelmente raccolte a cura del dott. B. Todeschini.

Dato l'indirizzo didattico del volume, esso riesce di scorrevole lettura (anche se vengono toccati argomenti piuttosto elevati) quando siano ben chiare almeno tutte quelle nozioni matematiche che sono ordinariamente svolte nel primo biennio di ingegneria, o di Scienze matematiche e fisiche.

L'ampia materia è suddivisa nel volume di circa 300 pagine, in 13 capitoli.

La trattazione ha inizio considerando, nei primi due capitoli, i campi dal punto di vista matematico: campi scalari, vettoriali, tensoriali.

Tale studio si identifica con quello degli scalari, dei vettori e tensori funzioni dei punti dello spazio sede del campo.

Nei capitoli successivi si considerano i campi dal punto di vista fisico.

Dai campi geometrici degli spostamenti e delle deformazioni di un corpo continuo, si passa al campo cinetico delle velocità.

Dalla cinematica si passa alla statica e alla dinamica, trattando il campo degli sforzi che si destano in un corpo deformabile, sia esso elastico, fluido o plastico. Sempre nello spazio geometrico tridimensionale, si considerano poi: il campo termico, il campo gravitazionale, il campo elettrostatico, il campo elettromagnetico.

Nel capitolo IX la trattazione si svolge nello spazio-tempo quadridimensionale ove si considera il campo elettromagnetico e le sue estensioni ai campi mesonici.

Nei due capitoli successivi, conformemente alla teoria della relatività generale, si considera il campo gravitazionale nello spazio-tempo, ove assume carattere tipicamente geometrico, per poi passare al campo relativistico unitario, sintesi della gravitazione e dell'elettromagnetismo.

In fine si assurge allo spazio delle fasi, ove, attraverso al campo energetico, si perviene alla meccanica analitica e all'equilibrio termochimico. Attraverso poi al campo d'azione, si stabilisce una dualità onde corpuscoli, che porta direttamente alla meccanica ondulatoria. Si conclude con un accenno ai campi di configurazione statistica e alla connessa meccanica quantistica.

Il volume è particolarmente indicato per chi desidera indirizzarsi allo studio matematico dei fenomeni fisici, perchè, attraverso al filo conduttore della nozione di « campo », sono passati in rassegna e collegati fra loro i più importanti argomenti della fisica matematica. E tale ampia veduta d'insieme non può non facilitare il compito a chi s'avvia verso più approfonditi studi nei diversi specifici rami di ricerca.

PAOLO UDESCHINI

FRANCESCO G. TRICOMI, *Funzioni ipergeometriche confluenti.* Monografie matematiche a cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche, N. 1 - Edizioni Cremonese, Roma, dic. 1954.

La nuova collana di monografie matematiche pubblicate a cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche si inizia brillantemente con questo volume del Tricomi dedicato alla teoria ed alle applicazioni di quelle particolari funzioni ipergeometriche che si dicono confluenti.

Si tratta, come è noto, di funzioni ottenute dalle ipergeometriche per mezzo di un passaggio al limite che manda a confluire in uno solo due dei punti singolari. La loro importanza risiede nel fatto che, assieme alle funzioni ellittiche, esse forniscono quasi tutte le funzioni speciali incontrate nei problemi di applicazione.

Di solito, a base della teoria delle funzioni confluenti viene posta la classica *equazione di Whittaker*:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\varkappa}{x}+\frac{1/4-\mu^2}{x^2}\right)y=0 \tag{1}$$

(con $\varkappa$, μ costanti) e si considerano di essa due certi integrali $M_{\varkappa,\mu}(x)$, $W_{\varkappa,\mu}(x)$ che prendono il nome di *funzioni di Whittaker*. Il Tricomi dà invece una nuova originale trattazione sostituendo alla (1) quest'altra equazione differenziale:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(c-x)\frac{dy}{dx}-ay=0 \tag{2}$$

(con a, c costanti) e considerando di essa due opportuni integrali $\Phi(a,\ c;\ x)$, $\Psi(a,\ c;\ x)$ di cui il primo coincidente con la nota *funzione di Kummer* ${}_1F_1(a,\ c;\ x)$. Queste due funzioni Φ, Ψ (di cui la prima è *uniforme*) godono complessivamente di proprietà più semplici di quelle godute dalle funzioni M, W di Whittaker (che sono entrambe *non uniformi*). La teoria generale delle funzioni confluenti, in questo nuovo indirizzo, si trova sviluppata nei primi tre capitoli, mentre il quarto è dedicato ai casi particolari di esse ed il quinto ad una interessante raccolta di problemi d'applicazione che richiedono la considerazione delle funzioni stesse.

Esposto così il piano generale dell'opera, diamo ora qualche più precisa indicazione sul contenuto dei vari capitoli.

Nel Cap. I, dopo una rassegna dei vari tipi di equazioni differenziali lineari del 2° ordine che possono ricondursi alla (2) o all'equazione di Bessel, viene esposto un preliminare studio della (2) con la determinazione del suo integrale generale, *nell'ipotesi che* c *non sia intero;* basta a tale scopo la sola funzione Φ. Di questa vengono poi stabilite numerose proprietà, deducendo in particolare alcune notevoli trasformate di Laplace e vari interessanti sviluppi in serie.

Nel Cap. II, dopo aver ricavato la nota espressione integrale della funzione Φ, si costruisce una seconda soluzione Ψ della (2) e se ne studiano le proprietà. Vengono determinate le relazioni fra Φ e Ψ e quelle che intercedono fra queste due funzioni e le M, W di Whittaker. Segue la determinazione *in ogni caso* dell'integrale generale della (2), sotto la forma di volta in volta più opportuna; i risultati della discussione sono riassunti in una espressiva tabella. Il Capitolo prosegue con la deduzione di un gran numero di formule, di vario genere, che esprimono altre notevoli proprietà di Φ e Ψ oppure che legano queste ad altre funzioni.

Il Cap. III è dedicato allo studio delle proprietà asintotiche delle funzioni confluenti (al divergere di x o dei parametri a, c), all'esame della distribuzione degli zeri delle funzioni confluenti reali ed infine alla descrizione dell'andamento di queste ultime nel campo reale.

Nel Cap. IV sono studiati i casi particolari delle funzioni confluenti e sopratutto la funzione gamma incompleta, la funzione degli errori e le funzioni del cilindro parabolico. Questo Capitolo è assai vasto e contiene un grandissimo numero di proprietà e di formule veramente interessanti ed utili.

Come si è già detto, l'ultimo Capitolo è una raccolta di esempi di applicazioni. Senza entrare in dettagli sui vari problemi studiati, ci limiteremo a segnalare la felicissima scelta di essi, che consente al lettore di vedere vive ed operanti le nozioni apprese nei precedenti Capitoli.

Dal punto di vista scientifico, occorre rilevare che, oltre alla già accennata novità di impostazione generale, sono dovuti all'Autore altri numerosissimi contributi originali in quasi tutte le questioni trattate (specialmente in quelle dei Cap. III e IV). Riteniamo però inutile elencarli perchè essi sono nettamente precisati nella prefazione e nel testo.

Il Tricomi è Autore troppo noto perchè sia necessario sottolineare, ancora una volta, quel tono di attraente semplicità e chiarezza e quel senso di costante premura verso il lettore che, già riscontrati nelle sue precedenti opere, dovevano necessariamente costruire un altro dei pregi dell'attuale volume.

ALDO GIZZETTI

M. PIAZZOLLA-BELOCH, *Lezioni di Matematica complementare (La Matematica elementare vista dall'alto)*, redatte dal prof. E. ORZALESI, Pubblicazioni dell'Istituto di Geometria dell'Università di Ferrara, 1953, litografia, pagg. 1-439.

Il volume contiene una rielaborazione del Corso di lezioni di Matematica complementare tenuto dall'A. all'Istituto di Geometria dell'Università di Ferrara. La materia svolta consiste degli argomenti che ordinariamente vanno sotto il nome di Matematiche elementari dal punto di vista superiore. Il volume è stato concepito e redatto in modo da poter essere utilizzato da un pubblico più vasto che non quello degli studenti del Corso sopra menzionato. Esso infatti appare contenere una esposizione sufficientemente ampia di certi argomenti la cui conoscenza è richiesta ai candidati dei concorsi a cattedre di scuole secondarie, sicchè anche questi ultimi potranno servirsene con vantaggio.

Tanto più che la materia è contenuta in un numero di pagine inferiore a quello che solitamente richiede l'esposizione di quegli argomenti e ciò senza sacrificio della chiarezza; inoltre i vari capitoli sono corredati da ampie note bibliografiche e, talvolta, da interessanti ed acute considerazioni didattiche, il che contribuisce a differenziarlo da pubblicazioni analoghe in lingua italiana

Il libro, in litografia (per la verità non delle migliori), è diviso in due parti che constano rispettivamente di quattro ed i sette capitoli. La prima parte è di contenuto algebrico-analitico, mentre la seconda è di contenuto geometrico. Dapprima vengono esposti i principi dell'aritmetica dei numeri interi, assoluti e relativi e dei numeri razionali; un breve capitolo è dedicato alla numerazione decimale. Manca un esposizione, sia pure sommaria, di qualche teoria dei numeri reali. Si passa poi a trattare, in modo abbastanza diffuso, della teoria dei numeri interi (divisibilità, congruenze, analisi indeterminata) e vi è pure un capitoletto sulle frazioni continue.

Un capitolo è dedicato alle equazioni algebriche: dopo aver richiamato le necessarie nozioni sulle equazioni algebriche in generale si passa a trattare di quelle di terzo e quarto grado. Un ultimo capitolo della prima parte contiene le più importanti nozioni sui numeri algebrici e trascendenti.

Nella seconda parte, dedicata alla geometria, vengono esposti dapprima i principi e gli assioni della geometria euclidea, con una breve discussione sui postulati della continuità ed osservazioni su quello delle parallele. Si passa poi a trattare delle geometrie non-euclidee, sia piane che solide, e poi della teoria dell'eguaglianza e di quella dell'equivalenza.

Due capitoli sono dedicati alla teoria delle trasformazioni puntuali elementari o definibili elementarmente (congruenze, similitudini, inversione) e contengono pure le cose essenziali sull'affinità e le trasformazioni quadratiche del piano. L'analisi dei metodi per la risoluzione dei problemi elementari di geometria piana, corredata da numerosi esempi illustrativi, occupa un ampio capitolo. Segue un capitolo sui problemi di terzo e quarto grado, con particolare riguardo ai problemi classici, e sul problema della ciclotomia.

L'ultimo capitolo della seconda parte è forse il più originale. Esso è dedicato alle costruzioni geometriche con gli strumenti classici e con altri strumenti. Notevole il metodo « del ripiegamento della carta » al quale l'A. ha apportato contributi originali. Il capitolo termina con la trattazione dei criteri di semplicità e precisione delle costruzioni geometriche.

LUIGI MURACCHINI

A. DENJOY, *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse*, Paris, GAUTHIER-VILLARS, 1954, pp VI-380.

La ristampa della celebre memoria dell'insigne analista francese, a quarant'anni di distanza dalla sua pubblicazione (divisa in quattro parti) su diverse riviste, incontra il favore di quanti intendono rifarsi alle origini su un importante capitolo della teoria delle funzioni di variabili reali, capitolo nel quale continua fervida l'opera di numerosi ricercatori. Ma, con ammirevole modestia, l'autore che pure ha instancabilmente dedicato quasi tutta la sua vita parte a sviluppare egli stesso le idee contenute in questa memoria (e già compendiosamente delineate in alcune precedenti note dei rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Parigi, 1910-1915), parte ad ispirare i suoi migliori allievi, dichiara nella prefazione che lo scopo di questa ristampa è essenzialmente didattico: cioè quello d'offrire ai giovani un materiale di studio che, a quanto molti spesso gli hanno riferito, sembra particolarmente efficace per penetrare gli intimi legami concettuali fra l'Analisi classica d'un lato e l'Analisi generale e la Topologia moderna d'altro lato.

Un'analisi completa, della memoria così straordinariamente ricca di concetti e così profonda, non potrebbe contenersi in limiti ristretti nè riuscirebbe opportuna in questa sede, non trattandosi propriamente d'una nuova edizione. Ma crediamo che un cenno ai concetti e ai teoremi ormai divenuti classici, e sopratutto uno sguardo panoramico a tutto ciò che da questa memoria è venuto fuori fino ad oggi, riusciranno interessanti per i lettori di questa rivista.

Il risultato più importante, relativamente ai quattro numeri derivati estremi (destri superiore D^+ e inferiore D_+, sinistri superiore D^- e inferiore D_-) è espresso dal teorema seguente (pp. 73-89):

se $f(x)$ è una qualunque funzione continua in un intervallo (a, b), in ogni punto interno ad (a, b) (fatta al più eccezione d'un insieme di misura lebesghiana nulla) deve verificarsi una delle quattro proprietà: 1°) $D^+f = D_+f =$

$=D^-f=D_-f$ finiti (esistenza della derivata ordinaria finita); 2°) $D^+f=D^-f=$ $=+\infty$, $D_+f=D_-f=-\infty$; 3°) $D^+f=+\infty$, $D^-f=D_+f$ finiti, $D_-f=-\infty$; 4°) $D^-f=+\infty$, $D^+f=D_-f$ finiti, $D_+f=-\infty$. L'autore costruisce (pp.89-119) numerosi e svariati esempi di funzioni per le quali i quattro casi effettivamente si presentano, associati (due o più di essi) o no.

Questo bellissimo teorema che, in parte, può dedursi da proprietà generali delle funzioni misurabili (continue o no) dimostrate contemporaneamente da G. C. YOUNG, ha dato inizio a numerose ricerche interessanti, fra le quali emergono: quelle di S. BANACH (1921) ed S. SAKS (1924, 1936) che completano i risultati, ora accennati, di G. C. YOUNG; quelle di F. ROGER (1935-38) dirette a trasportare i risultati di DENJOY nell'ordine d'idee della cosidetta *geometria infinitesimale diretta* (di BOULIGAND), per quanto concerne le proprietà tangenziali, addirittura dei più generali insiemi di punti d'uno spazio euclideo ad n dimensioni (ricerche, queste ultime, che, per la loro vastità e complessità, dèbbono considerarsi ancora lontane da una conclusione soddisfacente); infine quelli degli stessi DENJOY (1953) e ROGER (1939), cui s'è aggiunto più recentemente F. COROMINAS (1947-48), i quali hanno cercato di dimostrare un analogo teorema relativamente ai numeri derivati d'ordine superiore al primo, per una qualunque funzione continua. Ma di siffatti numeri derivati possono darsi diverse definizioni fra loro non equivalenti ciascuna delle quali presenta proprietà particolari e aspetti più o meno interessanti: sicchè, non essendo ancora riusciti a riconoscere quale delle varie definizioni sia preferibile alle altre, la ricerca non è stata condotta a termine e questo problema deve, a tutt'oggi, considerarsi aperto.

L'autore definisce e studia le *funzioni approssimativamente continue*, cioè le funzioni $f(x)$ che, in un punto x_0 dell'intervallo (a, b) ove esistono finite, godono della proprietà: qualunque sia il numero $\varepsilon>0$, l'insieme dei punti x di (a, b) per i quali sussiste la limitazione $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, ha densità 1 in x_0 (p.141). Egli dimostra: che ogni funzione misurabile in (a, b) è approssimativamente continua in quasi tutto (a, b) (cioè in ogni singolo punto di (a, b), fatta al più eccezione d'un insieme di misura lebesghiana nulla) (p. 146); che una funzione misurabile e limitata in (a, b) è la derivata del suo integrale lebesghiano, in ogni punto di (a, b) in cui è approssimativamente continua (p. 148); che una funzione approssimativamente continua in tutto (a, b) passa, entro ogni intervallo (c, d) parziale di (a, b), per tutti i valori compresi fra $f(c)$ ed $f(d)$ (p. 179). W. SIERPINSKI (1923) ed E. KAMKE (1927) hanno generalizzato e studiato la definizione di continuità approssimativa per le funzioni non misurabili. S. KEMPISTY (1924) ha introdotto il concetto di massimo limite e di minimo limite approssimativi in un punto x_0, per una qualunque funzione $f(x)$ (misurabile o no), in modo che l'uguaglianza di tali limiti viene ad esprimere una condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(x)$ sia approssimativamente continua in x_0. S. SAKS (1937) ha definito le derivate parziali approssimative e i differenziali approssimativi (in senso totale) delle funzioni di più variabili, e ne ha iniziato lo studio.

Al concetto di funzione approssimativamente continua si riallaccia quello di *derivata approssimativa*, in un punto x_0 di (a, b), di una funzione $f(x)$ definita in (a, b) ed approssimativamente continua in x_0. Così vien definito dall'autore (pp. 229, 268) (1) quel numero (se esiste, ben determinato e finito.

1) Contemporaneamente ad A. KHINTCHINE, cui è invece dovuto il nome di *derivata asintotica*. Quest'autore ha proseguito le sue originali ricerche fra il 1923 e il 1927.

dalla parte considerata a destra o a sinistra di x_0) al quale è possibile far tendere il rapporto incrementale $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$, quando x tende ad x_0 (dalla parte considerata) assumendo esclusivamente valori appartenenti ad un certo insieme $E^+(x_0)$ o $E^-(x_0)$ di densità 1 in x_0 (rispettivamente destra o sinistra). Le funzioni approssimativamente continue e le derivate approssimative hanno in comune molte proprietà, per es. sono, sia le une che le altre, della prima classe di Baire (pp. 296-297): H. LOOMAN (1924) è riuscito a costruire effettivamente una successione di funzioni continue, avente per limite una funzione approssimativamente continua (o rispettivamente una derivata approssimativa) comunque prefissata in (a, b) (2).

L'ultima parte del libro, dedicata al calcolo inverso della derivazione, è quella in cui si esplicano pienamente le superoiri qualità creatrici dell'autore: non s'esagera dicendo che mentre da un lato essa conclude felicemente un ciclo di ricerche del più grande interesse, al quale avevano collaborato generazioni d'insigni analisti, d'altro lato essa ne ha aperto un altro di non minore vastità e profondità, se non di pari ineresse. Il secolare problema della ricerca della primitiva d'una derivata assegnata $f(x)$, cui LEBESGUE aveva fatto fare un passo decisivo dandone, col suo nuovo procedimento d'integrazione, la completa soluzione solo nel caso che $f(x)$ si mantenga limitata, riceve qui soluzione anche nel caso opposto (3). Il procedimento di calcolo, ideato dall'Autore e da lui chiamato *totalizzazione*, consiste in una successione transfinita (nel senso di CANTOR) d'operazioni che permettono, qualunque sia la derivata $f(x)$ prefissata in (a, b), di trovare il relativo incremento $F(b) - F(a)$ della primitiva (pp. 321-341). Il procedimento si basa essenzialmente sulla continuità della $F(x)$ e sul fatto che, se P è un qualunque insieme perfetto (continuo o discontinuo) di punti appartenenti ad (a, b): 1°) $f(x)$ è limitata su P e quindi sommabile su P, oppure ogni porzione di P ne contiene un'altra sulla quale $f(x)$ è limitata e quindi sommabile (pp. 264-267, 325); 2°) le oscillazioni di $F(x)$ sugli intervalli contigui a P formano una serie convergente, oppure ogni porzione di P ne contiene un'altra per la quale tale proprietà si trova verificata (pp. 251-320).

Il procedimento accennato è chiamato più precisamente *totalizzazione completa* (p. 339), per distinguerlo da quello, che l'autore chiama altrove *totalizzazione semplice*, analogo ma più generale e che può applicarsi alla ricerca della variazione $F(b) - F(a)$ d'una funzione continua $F(x)$ del tutto arbitraria, purchè dotata in tutto (a, b) d'un numero derivato estremo finito (supposto noto tale numero) (p. 338).

Una *totale semplice indefinita* è una funzione $F(x)$ *risolubile*, generalizzazione del concetto di funzione assolutamente continua (pp. 265-273): ogni porzione d'un qualunque insieme perfetto ne contiene un'altra sulla quale $F(x)$ è assolutamente continua; inoltre una funzione $F(x)$ risolubile in (a, b) è dotata, in quasi tutto (a, b), di derivata approssimativa di cui $F(x)$ è la totale indefinita (pp. 273, 341-342).

---

(2) Lo stesso problema, nella stessa memoria, è stato risolto da LOOMAN per le funzioni cosidette *a preponderanza di continuità* e per le cosidette *derivate preponderanti*, che DENJOY introduce alle pp. 159, 296-297 e studia più ampiamente in una nota apparsa, alla stessa epoca, nell'Einsegnement Matématique: nota che ci dispiace di non trovare ristampata in questo libro.

(3) In che senso tale problema possa considerarsi ancora aperto dopo la memoria qui recensita di DENJOY, è ampiamente indicato e illustrato da N. LUSIN (Annali di Matematica, 1917).

Lo studio della totalizzazione, sia come procedimento inverso della derivazione, sia come nuovo metodo d'integrazione che generalizza quello di LEBESGUE, può dirsi in questa memoria (già così ampia e profonda) solo iniziato: infatti le ricerche apparse sull'argomento dal 1915 ad oggi, sono tante, che sarebbe difficile farne una bibliografia completa. Vogliamo qui solo accennare per sommi capi.

Un primo gruppo di ricerche sono state fatte, con indirizzo critico, da H. HAKE (1921), P. ALEXANDROFF (1924), H. LOOMAN (1925), per stabilire un confronto fra la totalizzazione e l'integrazione secondo PERRON. Questi autori hanno dimostrato l'equivalenza dei due metodi d'integrazione, pur con qualche riserva e a prescindere dall'effettivo procedimento costruttivo dell'integrale. Le loro ricerche sono state proseguite da vari autori, tra i quali J. C. BURKILL (1931-35), J. RIDDER (1931-35), G. TOLSTOFF (1940), P. MALLIAVIN (1949). Esse si connettono strettamente col problema di rielaborare il procedimento costruttivo di DENJOY, allo scopo d'eliminare (se possibile) il transfinito (P. ROMANOVSKI, 1932).

Procedimenti che generalizzano quello della presente memoria, o che da certi punti di vista assomigliano ad esso, sono stati ideati da molti autori. Allo stesso DENJOY ne sono dovuti diversi, alcuni dei quali si trovano sistematicamente studiati nel suo trattato dedicato al calcolo dei coefficienti d'una serie trigonometrica (Collezione Borel, 1941-49) (4). Uno di questi procedimenti, che in certo senso generalizza la totalizzazione semplice, permette di calcolare la primitiva (seconda) d'una qualunque derivata seconda generalizzata (e persino d'un numero derivato secondo estremo generalizzato). Con tale procedimento DENJOY ha effettuato il calcolo dei cofficienti d'una qualunque serie trigonometrica di somma assegnata (1921). Un problema analogo ma più generale ancora, egli ha affrontato e risolto nel 1935, col determinare la più generale funzione continua che possiede un'assegnata derivata n. esima (nel senso di PEANO, con n indice di derivazione arbitrario). Nel 1939-40 ha definito un nuovo procedimento di sommazione delle serie, procedimento di cui ha dimostrato la sostanziale equivalenza con la totalizzazione delle funzioni.

H. LOOMAN (1923), M. KRZYZANSKI (1939), P. ROMANOVSKI (1941) hanno studiato la totalizzazione delle funzioni di due o più variabili reali. Quest'ultimo l'ha studiata anzi addirittura negli spazi astratti e nel senso di STIELTJES; da altro punto di vista, un tale studio è stato iniziato anche da J. RIDDER nel 1939. T. VIOLA (1933) ha generalizzato in particolar modo la totalizzazione, allo scopo di determinare la più generale funzione continua da una sola parte, che possieda derivata assegnata da quella parte (5). H. LEBESGUE è riuscito a trasformare la totalizzazione (in quanto procedimento atto alla ricerca delle primitive) in modo da liberarla dal concetto generale d'integrazione, cioè da renderla del tutto indipendente da ogni definizione, precedentemente data, d'integrale (1926); successivamente egli ha ampliato le sue celebri « Lezioni sull'integrazione », nella seconda edizione, con un intero capitolo dedicato alla totalizzazione (1928). E da ultimo segnaliamo anche le recentissime ricerche di W. J. TRJITZINSKY,

(4) Parte IV. Ivi si adopera il plurale « *totalizzazioni* », per indicare genericamente i detti procedimenti.

(5) Questo problema, che da ricerche di L. MOTCHANE (1949-51) sembra offrire interesse in nuove questioni di fisica matematica, non può ancora dirsi, a tutt'oggi, completamente risolto.

sui problemi di totalizzazione che si connettono agli operatori laplaciani non sommabili (1954).

L'opera di DENJOY e particolarmente la celebre memoria ora ristampata, che ha dato l'abbrivo a così imponente movimento di ricerca, non è esente da critiche. Certo l'esposizione non è sempre limpida, anzi talvolta è oscura e pesante e, in qualche dettaglio, presenta delle mende. Non si può neppure negare che il senso di pesantezza è talvolta aumentato dalla sovrabbondanza della terminologia e del simbolismo. Sembra anche di cogliere un atteggiamento contradittorio nel fatto che egli abbia dato tanta importanza al problema della ricerca delle primitive, mentre non abbia esitato altrove a qualificare come « fisicamente falsa » la nozione di derivata (6): ma se ed in quale misura una tale contradizione sia inerente alla fase attuale dell'evoluzione storica dell'analisi matematica, soltanto l'avvenire potrà decidere.

Contro tutte le critiche, il Maestro reagisce sempre con appassionato ed elevato vigore polemico. Egli giustifica la sua terminologia e vari aspetti del suo indirizzo di ricerca, con la necessità profondamente sentita di distinguere sempre nettamente, nella teoria degli insiemi e delle funzioni di variabili reali, il complesso delle proprietà descrittive (o topologiche) da quello delle proprietà metriche; per le prime egli si proclama diretto continuatore dell'opera di BAIRE, per le seconde, invece, dell'opera di BOREL e di LEBESGUE. E di fronte ai tentativi di svincolare la totalizzazione dalla ricorrenza transfinita (v. sopra), prende posizione di netta intransigenza (7). La sua attività è ancor oggi ammirevole per la fervida fantasia, per il giovanile entusiasmo, per la classicità e la concretezza dei difficili problemi affrontati.

TULLIO VIOLA

Die Hauptreferate des 8. polnischen Mathematikercongress (6-12. September 1953 in Warschau) - Deutscher Verlag der Wissenschaften, pag. 1-125.

Questo volumetto raccoglie i rapporti letti all'ottavo Congresso dei Matematici polacchi a Varsavia dal 6 al 12 settembre 1953. Il contenuto è il seguente: 1) L. Infeld e collaboratori: Die Bedeutung der modernen Physik fuer die Entwicklung der Matematik; 2) K. Kuratowski: Der Stand und die Aufgaben der Organisation des mathematischen Lebens in Volkspolen; 3) A. Mostowski e collaboratori: Der gegenwaertige Stand der Grundlagenforschung in der Mathematik; 4) H. Steinhaus e collaboratori: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Hilfsmittel zu Untersuchungen in Naturwissenschaften und Produktion; 5) S. Turski e collaboratori: Die mathematischen Methoden der modernen Technik; 6) T. Wazewski e collaboratori: Der Einfluss moderner mathematischer Methoden auf die klassischen Theorien der Mathematik.

Una breve relazione sul contenuto di questi rapporti trovasi a pag. 156 di questo Bollettino, serie 3, anno VIII (1953).

---

(6) *Introduction à la theorie des fonctions de variables réelles*, parte I (Parigi, Hermann 1937, Actualités scientif. et industr. n. 451 p. 9).

(7) « Voler eliminare, dalla teoria di questo calcolo, l'uso dei numeri transfiniti della classe II, significa proporsi d'eseguire una sinfonia senza strumenti nè musica, o di dipingere un quadro senza pennelli nè colori » (*Leçons sur le calcul des coefficients* ecc., op. cit. p. 327). « Senza il transfinito, l'idea stessa della totalizzazione scompare » (*L'énumération transfinie*, Parigi, Gautier-Villars 1946, libro I, p. 1).

CRISTOBAL DE LOSADA Y PUGA, *Curso de Análisis Matemático*, T. 1 (1951), (2^a ed), XXV + 640, T. 2 (1953), (2^a ed.), XIX + 703, T. 3 (1954), XXII + 814 - Universidad Catolica del Perù.

L'A. in questo suo trattato generale in tre volumi, scritto in lingua spagnola, ha avuto di mira due scopi: fornire i necessari orientamenti sui più importanti capitoli dell'Analisi e preparare i giovani alla lettura dei trattati specializzati e delle memorie originali.

Nel primo volume, a carattere introduttorio, sono studiati il campo reale, il campo complesso, la teoria dei limiti, gli elementi del calcolo differenziale ed integrale e le equazioni differenziali lineari. Nel secondo volume sono studiati gli algoritmi infiniti, le curve e le superficie, l'integrazione numerica, grafica e meccanica, gli integrali impropri, i curvilinei e i multipli; nel terzo infine le serie trigonometriche, le serie divergenti, le funzioni di variabile complessa, le equazioni differenziali e il calcolo delle probabilità.

La chiarezza dell'esposizione, l'ampiezza delle notizie, e la bella veste tipografica rendono assai attraente lo studio di questo trattato.

GIOVANNI SANSONE.

RALPH PHILIP BOAS, JR., *Entire functions*, Academic Press, Inc. Publishers, New York, 1954, pp. 276, Dollari 8.

In questo libro l'Autore dà una profonda, aggiornatissima esposizione delle ricerche sulle funzioni di tipo esponenziale il cui campo di esistenza è un settore, od un semipiano, od il piano intero.

Il libro è diviso in 12 capitoli: nei primi cinque sono esposte alcune questioni fondamentali sulle funzioni intere, e nei capitoli seguenti le ricerche sulle funzioni di tipo esponenziale. A ciascun capitolo sono aggiunte delle note interessantissime, volte a lumeggiare lo sviluppo delle idee.

In complesso sono riportati circa 300 teoremi, compresi quelli la cui dimotrazione è lasciata piuttosto al lettore.

Il libro contiene inoltre una ricchissima raccolta bibliografica riferentesi ad oltre 150 autori ed un elenco di circa 500 lavori sull'argomento, tutti di recente data (dopo il 1920); chiude il volume un indice degli autori citati, delle definizioni, e dei teoremi.

Tutti questi pregi rendono il libro non solo di interessante lettura ma di utile orientamento per ulteriori ricerche.

Per la bibliografia anteriore al 1920, l'A. rimanda ai libri di G. Valiron: « Lectures on the general theory of integral functions », Privat, Toulouse, 1923; « Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable », Mémorial des sciences mathématiques. Gauthier-Villars, Paris, 1925.

E' opportuno dare un breve cenno di alcuni risultati contenuti nei vari capitoli.

I. Capitolo: *Introduction*, pp. 1-7.

In questo capitolo, a carattere introduttivo, sono richiamate le usuali notazioni, le formule di Jensen, di Carleman, di Nevanlinna, la ineguaglianza di Carathéodory, il teorema di Pragmén-Lindelöf la densità di Pólya, le trasformazioni di Laplace e di Fourier.

II. Capitolo: *General properties of entire functions of finite order*, pp. 8-38.

In questo capitolo sono richiamate anzitutto le definizioni di ordine ρ e di tipo τ di una funzione intera L'A. chiama funzioni di crescenza (ρ, τ) le funzioni il sui ordine non eccede ρ ed il cui tipo non eccede τ. Considera poi la indicatrice di crescenza di Progmén-Lindelöf, l'esponente di convergenza, il genere di una funzione intera e studia la relazione fra la crescenza e la distribuzione degli zeri. Richiama poi i classici risultati sui fattori primari di Weierstrass, il teorema di Laguerre sulla separazione degli zeri e chiude il capitolo con alcune questioni riguardanti le funzioni di genere zero, oggetto, queste ultime, di recenti ricerche.

III. Capitolo: *The minimun moduls*, pp. 39-54.

In questo capitolo sono esposte le ricerche sulle limitazioni riguardanti il minimo modulo $m(r)$ delle funzioni intere e le relazioni con il massimo modulo $M(r)$. L'A. espone poi un lemma di Boutroux-Cartan sul minimo modulo di $P(z) = \prod_{1}^{\infty}(z - z_n)$ e fa alcune applicazioni. Considera le funzioni di ordine zero e richiama il teorema $\log m(r) \backsim \log M(r)$, per una successione r_n tendente all'infinito. Chiudono il capitolo alcune limitazioni inferiori per $\log|f(z)|$, per funzioni di ordine maggiore di zero e certi risultati dello stesso Boas (1950).

IV. Capitolo: *Functions with negative zeros*, pp. 55-65.

In questo capitolo l'A. tratta del legame fra la crescenza delle funzioni intere e la distribuzione degli zeri. Precisamente egli considera il caso degli zeri negativi e riporta teoremi che hanno una lunga storia, quali quelli di Valiron (1914), di Titchmarsh (1927) a quelli recenti di Pfluger (1939), di Delange (947, 1952), ecc.. Considera anche una generalizzazione per il caso che gli zeri abbiano argomenti che tendano a π per n tendente all'infinito, ed esamina la connessione fra il comportamento delle funzioni intere lungo l'asse reale negativo e la distribuzione degli zeri.

V. Capitolo: *General properties of functions of exponential type*, pp. 66-81.

In questo capitolo l'A. inizia lo studio delle funzioni di tipo esponenziale (le indicheremo in seguito con t.e.) i cui fondamenti si debbono a Pólya (1929). Considera la trasformata di Borel di una funzione di t. e. e richiama alcune ricerche di Macintyre (1939) sulla rappresentazione di una funzione di t. e. in un angolo mediante la trasformata di Laplace ed un teorema dello stesso sulla scomposizione di una funzione di t. e. in un angolo, nella somma di una funzione intera di t. e. ed una altra funzione di cui dà una limitazione.

VI. Capitolo: *Functions of exponential type, restricted on a line. I. Theorems in the large*, pp. 82-112.

L'A. inizia la esposizione delle proprietà delle funzioni di t. e. che dipendono da particolari condizioni, precisamente qui tratta delle funzioni di t. e. limitate su una linea. Espone un gruppo di teoremi riguardanti alcune espressioni integrali legate alla distribuzione degli zeri ed un teorema di Paley e Wiener

(1934) sulla rappresentazione delle funzioni intere di t. e.. Chiude il Capitolo con le funzioni di t. e. periodiche e quasi periodiche sull'asse reale,

VII. Capitolo: *Functions of exponential type, restricted on a line. II. Asimptotic behavior in a half plane,* pp. 113-132.

L'A. tratta qui del comportamento asintotico delle funzioni di t. e. e con appropiate condizioni. Anzitutto considera il prodotto di Blaschke $B(z) = \prod_{1}^{\infty} \frac{1 - z/z_n}{1 - z/\bar{z}_n}$, ove z_n sono gli zeri di una funzione di t. e., nel semipiano superiore e considera il $\lim_{r \to \infty} r^{-1} \log | B(re^{i\theta}) |$, e $\lim_{r \to \infty} r^{-1} \log | f(re^{i\theta}) |$ con apposite condizioni (Alfors e Heine, 1949). Espone poi alcune applicazioni di questi teoremi ed infine considera la funzione di t. e. prive di zeri nel semipiano superiore. Richiama infine una classe di funzioni di t. e. introdotte da Levin (1950) e dà la rappresentazione analitica di queste funzioni.

VIII. Capitolo: *Functions of exponential type: Connections between growth and distribution of zeros,* pp. 133--151.

L'A. seguendo alcune ricerche di Pfluger (1944) considera il legame fra la crescenza e la distribuzione degli zeri, per una funzione di t. e.

IX. Capitolo: *Uniqueness theorems,* pp. 152-177.

In questo capitolo l'A. studia le funzioni identicamente nulle in relazione a proprietà della crescenza. Anzitutto considera il caso che gli zeri siano reali positivi e riporta in questo caso un teorema di Carlson; tratta successivamente il caso che gli zeri siano reali positivi e negativi ed un teorema di Valiron. Considera poi teoremi di unicità dipendenti da particolari operatori, così per le serie di interpolazione di Newton, relative a funzioni di t. e., così per le serie di Abel, di Lindstone. Infine considera funzioni di t. e. che prendono valori interi, per valori interi della variabile.

X. Capitolo: *Growth theorems,* pp. 178-205.

L'A. considera il problema della crescenza di una funzione di t. e. lungo una linea quanto si conosca il comportamento della crescenza su una successione di punti di questa linea. Riporta un teorema di Cartwright (1935) ed un teorema ad esso connesso, e così pure teoremi che hanno fatto oggetto di recenti ricerche, anche dello stesso Boas (1946). L'A. dà poi un teorema di Vladimiro Bernstein (1934), un teorema di Duffin Schaeffer (1938) per la limitazione di $f(x)$, ed altri teoremi per la limitazione delle derivate.

XI. Capitolo: *Operators and their extremal properties,* pp. 206-232.

In questo capitolo l'A. studia una questione più generale di quella trattata nei capitoli IX e X e precisamente considera la crescenza delle funzioni ottenute mediante operatori. Richiama, ad esempio, un teorema di S. Bernstein, riporta poi alcune ricerche su alcuni funzionali dipendenti da funzioni di t. e., infine tratta di una classe particolare di funzionali considerati da Levin (1950).

XII. Capitolo: *Aplications,* pp. 233-251.

In questo capitolo l'A. dà alcune applicazioni delle funzioni di t. e. a varie questioni di analisi: così ai funzionali $\int_a^b f(zt)g(t)dt$, con $f(z)$ funzione di t. e., alla serie di Fourier, al comportamento sulla circonferenza di convergenza delle serie di potenze. L'A. tratta inoltre le serie di potenze lacunari che rappresentano funzioni di t. e. e le applicazioni di queste funzioni di t. e. agli sviluppi in serie di polinomi di Appel. Il capitolo termina con applicazioni alle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine infinito, mostrando il legame con le equazioni alle differenze e con alcune ricerche sulla approssimazione in tutto l'asse reale mediante funzioni di t. e. di S. Bernstein (1946, 1948, 1950).

Il libro può essere letto da chiunque sia a conoscenza della teoria delle funzioni di variabile complessa; l'A., che alla teoria delle funzioni di tipo esponenziale ha dedicato dal 1936 al 1954 una trentina di lavori originali, ha scritto un'opera che si afferma per la profondità della trattazione e l'eleganza della esposizione.

GIUSEPPE BELARDINELLI

OTTO-HEINRICH KELLER, *Geometrie der Zahlen*, Band I 2, Heft 11, Teil III della « Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften », Teubner, Leipzig, 1954, pagine 84.

Si tratta, come è naturale per un lavoro di questo genere, di un rapido sguardo d'insieme sull'argomento, appoggiato da una minuziosa enumerazione di questioni e di risultati e da un fitto elenco di citazioni e di rinvii bibliografici.

L'argomento trattato costituisce uno dei capitoli più suggestivi della teoria dei numeri. La geometria dei numeri, com'è ben noto, muove da concetti e da metodi propri della geometria per applicarli a considerazioni di natura aritmetica. Le origini di un tale ordine di idee sono dall'Autore fatte risalire a C. F. Gauss, e come illustri continuatori sono ricordati G. Dirichlet e F. Klein, il primo però ad ordinare questa materia in organica disciplina fu, com'è ben noto, H. Minkowski, a cui risale la sistematica applicazione di tali metodi, i quali ebbero il vantaggio di convogliare verso le ricerche aritmetiche il notevole contributo della intuizione spaziale. I nuovi metodi si rivelarono infatti singolarmente fecondi e diedero al Minkowski la possibilità di risolvere brillantemente difficili questioni rimaste per lo innanzi insolute, come quella, divenuta celebre, di dimostrare che *il valore assoluto del discriminante di un corpo algebrico è sempre maggiore di* 1. Tale dimostrazione, fondamentale per la teoria dei corpi algebrici, non era riuscita a Hermite e a Kronecker, dopo molti tentativi.

Ciò premesso passiamo a riassumere il contenuto del fascicolo in questione. Esso è diviso in nove parti.

La parte A è dedicata ai teoremi fondamentali sopra i corpi *convessi* (o più in generale *non concavi*) nei reticoli numerici.

Si comincia da una serie di definizioni, di cui ricordiamo le principali, che fissano in sostanza i concetti fondamentali di tutta la teoria. Dopo aver ricordato i concetti abbastanza comuni di *reticolo vettoriale* Λ in uno spazio a n dimensioni, e del relativo *reticolo di punti*, nonchè dei corrispondenti *reticoli di rette*, e di *parallelepipedo fondamentale*, e aver accennato alcune ovvie considerazioni sulle trasformazioni fra reticoli e sul contenuto del parallelepipedo fondamentale $d(\Lambda)$, si passa alla definizione di *distanza radiale*, numero non negativo associato ad ogni coppia di punti, $S(A, B)$, dipendente esclusivamente dalle differenze fra le corrispondenti coordinate e positivamente omogenea rispetto a tali differenze. Si definisce poi il *corpo campione* (Eichkörper), insieme dei punti X per cui $S(O, X) \leq 1$, e detta M la minima distanza radiale possibile fra due punti del reticolo si chiamerà *gradino* (Stufe) intorno ad un punto A del reticolo l'insieme dei punti X per cui $S(A, X) \leq M/2$.

La distanza radiale si dirà *simmetrica* (wechselseitig) se si ha sempre $S(A, B) = S(B, A)$ e si dirà *accordante* (einhellig) se soddisfa alla disuguaglianza triangolare, $S(A, B) \leq S(A, C) + S(C, B)$ per ogni terna di punti A, B, C.

Quest'ultima disuguaglianza è soddisfatta sempre e solo quando il *corpo campione* è non concavo.

Si passa ad enunciare poi il teorema fondamentale del Minkowski: *un corpo non concavo, simmetrico rispetto all'origine, il cui ipervolume sia* $J \geq 2^n \cdot d(\wedge)$ *contiene almeno un' altro punto del reticolo.*

Questo celebre teorema ha dato luogo ad un numero grandissimo di variazioni, di approfondimenti e considerazioni laterali, diligentemente elencate dal nostro Autore, che le coordina in rapida e chiara sintesi.

Nel secondo teorema del Minkowski è approfondito il contenuto del primo attraverso la considerazione dei minimi successivi. Sia O_1 un punto del reticolo il quale abbia la minima distanza radiale possibile S_1 dall'origine, ed O_k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ un punto che non appartiene all'iperpiano determinato da $O, O_1, \ldots, O_{k-1}$, il quale abbia da O la minima distanza radiale possibile S_k. Si ha allora (J è l'ipervolume del corpo campione):

$$J \cdot S_1 \cdot S_2 \ldots S_n \leq 2^n \cdot d(\wedge).$$

Anche di questo teorema sono elencate numerose variazioni ed estensioni.

La parte A termina con un gruppo di considerazioni sui *gradini di massimo volume* (il cui ipervolume e uguale a $d(\wedge)$) e su altri tipi di corpi, e con un altro gruppo di considerazioni sui *reticoli critici* (si tratta in sostanza di determinare un reticolo, di determinante minimo possibile $\Delta(K)$, di cui nessun punto, eccetto l'origine, appartenga a un fissato corpo K, simmetrico intorno all'origine; $\Delta(K)$ si dice il *determinante critico*).

Nella parte B si tratta dei *corpi stellati* e quindi in generale non convessi. Un corpo stellato è un insieme tale che ogni suo punto A è unito all'origine da un segmento rettilineo formato da punti tutti interni, eccettuato eventualmente A. La trattazione si apre anche qui con una serie di definizioni, tra cui fondamentale quella di determinante critico, analoga a quella data sopra e continua con un elenco di teoremi e con un altro di ipotesi e problemi. Segue una lista di risultati relativi a numerosi tipi particolari di corpi stellati (le notizie si riferiscono per lo più alla determinazione del determinante critico). La parte B si conclude con un altro celebre teorema enunciato dal Minkowski, ma la cui dimostrazione generale è dovuta a Hlawka, relativo alla limitazione del rapporto $V(K)/\Delta(K)$ dove $V(K)$ l'ipervolume di K.

La parte C è dedicata alle forme lineari: essa inizia con un altro celebre teorema del Minkowki sulle forme lineari (caso particolare di quello enunciato in A), noto per le sue svariate applicazioni alla teoria dei numeri algebrici.

Anche questo teorema è ricco di varianti ricordate dal nostro Autore. Largo spazio è poi fatto al teorema, ipotizzato da Minkowski e dimostrato completamente da Hajos intorno al caso limite del precedente teorema (quando le disuguaglianze non possono essere soddisfatte tutte in senso forte).

Nella parte D si tratta del minimo di forme omogenee.

Il problema centrale è quello di determinare l'estremo superiore dei minimi valori assoluti assunti dalle forme di ugual discriminante nei punti del reticolo diversi dall'origine. La trattazione è estesa a vari tipi di forme e si conclude con considerazioni sulle limitazioni relative a somme di potenze simili ed a prodotti di forme di ugual determinante.

La parte E è dedicata alle forme non omogenee: le questioni che vi si riconnettono sono legate alla considerazione di corpi convessi che non hanno il centro in un punto del reticolo. La trattazione interessa sopratutto il minimo di un prodotto di forme lineari.

La parte F riguarda le forme quadratiche definite.

Vi si tratta in primo luogo della loro riduzione; nelle prime ricerche su questo argomento vede l'Autore l'origine di tutta la geometria dei numeri.

Seguono considerazioni sullo spazio dei coefficienti, i cui punti sono le forme stesse, e sui rapporti fra paralleloedri e forme quadratiche.

La parte G è dedicata alle frazioni continue

I Poligoni di Klein sono applicati allo studio delle frazioni continue ordinarie e semiregolari.

Allo studio delle frazioni continue e delle forme quadratiche sono poi applicate figure della rete modulare. E' inoltre illustrata la questione dell'esistenza di un algoritmo euclideo nei campi quadratici, e questioni che si connettono alle frazioni continue pluridimensionali.

La parte H tratta delle applicazioni alla teoria dei numeri algebrici. Più in particolare sono trattate le tre classiche questioni: della limitazione inferiore del valore assoluto del discriminante di un corpo algebrico (cui abbiamo accennato inizialmente); delle unità nei corpi algebrici; e infine delle forme decomponibili coordinate agli ideali.

L'ultima parte I contiene una breve relazione sulle applicazioni della geometria dei numeri ai problemi delle partizioni.

In complesso si tratta di un notevole lavoro di sintesi in cui sono felicemente conciliate, in brevissimo spazio, le necessità di una esposizione chiara e vivace con quelle di una esauriente informazione storica e bibliografica su un argomento vastissimo e particolarmente ricco di recenti sviluppi.

MARCO CUGIANI

K. YANO, *Gruppi di trasformazioni in spazi geometrici differenziabili*, Roma, Istituto Matematico 1954, ediz. ciclostilata, pp. IV, 281.

Questo volume riproduce le lezioni tenute dall'Autore dal dicembre '953 all'aprile '954 presso l'Istituto di Alta Matematica. In queste lezioni l'A. ha esposto le più recenti ricerche (tra le quali ricordiamo quelle dovute ad I. P. EGOROV, M. S. KNEBELMANN, E. B. SHANKS, G. VRANCEANU, H. C. WANG ed all'A. stesso) intorno ai gruppi di movimenti negli spazi geometrici differenziabili con particolare riguardo agli spazi riemanniani ed agli spazi a connessione affine o proiettiva. Lo studio di tali gruppi, che ha come scopo la ricerca dei legami tra la struttura dello spazio e la struttura del gruppo, è qui sistematicamente sviluppato sul concetto della derivata di Lie di un ente geometrico. Tale derivata, come è noto, è determinata da un vettore controvariante ξ, e, precisamente, considerata la trasformazione infinitesima, $y = x + \xi \delta t$, ed il cambiamento di variabili $x' = x + \xi \delta t$, la derivata di Lie dell'ente geometrico di componenti Ω^A è definita dalla relazione: $X\Omega^A = \Omega^A(y) - \Omega^A(x')$.

Il volume dà un quadro completo dello studio raggiunto dalla teoria ed è perciò indispensabile a quanti vogliano dedicarsi a questo campo di ricerche.

Anche se non appare sempre in modo esplicito, l'intuizione geometrica è di guida allo sviluppo analitico insito nella natura stessa dei problemi.

Questa intuizione fa sì che il volume si fa segnalare anche per la limpidità e la snellezza della trattazione.

Il volume è diviso in undici capitoli. I primi cinque sono dedicati ad una esposizione breve, elegante e a volte anche originale dei concetti fondamentali relativi alla Geometria degli spazi di Riemann (cap. I) degli spazi a connessione affine (cap. II) e proiettiva (cap. III), della geometria conforme degli spazi di Riemann (cap. IV) ed, infine, ai gruppi di trasformazioni (cap. V). In questa breve esposizione l'A. oltre a seguire l'indirizzo classico di Ricci Curbastro, mette in luce anche l'indirizzo di E. Cartan del metodo del riferimento mobile. Tra gli argomenli trattati ricordiamo il concetto di conica affine e l'esposizione della geometria conforme nella quale sono esposti recenti risultati dell'A. stesso.

Nel cap. VI, osservato che la derivata di Lie del tensore fondamentale di uno spazio di Riemann è ancora un tensore, si caratterizzano i movimenti dello spazio rispetto a tale derivata pervenendo alle classiche equazioni di Killing. Si caratterizzano inoltre i movimenti affini, le collineazioni affini e proiettive, le trasformazioni conformi, introducendo di volta in volta la derivata di Lie dei coefficienti della relativa connessione. Il cap. si chiude con una trattazione, completa ed indipendente dai movimenti, della derivata di Lie di un tensore e di una connessione. Questo cap. si può ritenere di introduzione al cap. VII, nel quale introdotto il concetto di ente geometrico nella forma più generale e definita la derivata di Lie per un tale ente, sono caratterizzati gli enti geometrici lineari per i quali la derivata di Lie è ancora un ente geometrico.

Considerato poi un gruppo G_r di trasformazioni infinitesime, si studiano le relazioni tra le r derivate di Lie di un ente geometrico lineare determinate dai vettori $\underset{\alpha}{\xi}$ che determinano le r trasformazioni generatrici del gruppo. Lo studio di queste relazioni permette la caratterizzazione dei gruppi di trasformazioni di uno spazio in relazione ai gruppi invarianti di un ente geometrico cioè dei gruppi G_r, $y = f(x; a^1, \ldots, a^r)$ per i quali, considerate le equazioni del gruppo come trasformazione di coordinate, $x = f(x; a)$, si ha $\Omega^A(y) = \Omega^{A'}(x')$, ove le $\Omega^{A'}$ sono le componenti dell'ente geometrico nel sistema di coordinate x'.

I teoremi che se ne deducono sono alla base della trattazione degli ulteriori capitoli nei quali vengono studiati separatamente i gruppi di movimenti nello spazio di Riemann (cap. VIII), i gruppi di movimenti affini (cap. IX|, i gruppi di collineazioni proiettive (cap. X) ed i gruppi di trasformazioni conformi (cap. XI). In ciascuno di questi casi l'esistenza di movimenti si riconduce ad un sistema di equazioni differenziali delle quali sono esaminate le condizioni di integrabilità.

Troppo lungo sarebbe il ricordare i numerosi risultati ed imbarazzante sarebbe anche una scelta di questi.

Comunque per dare una idea del tipo di teoremi riguardanti questa teoria ricordo tra tutti il seguente bel teorema dovuto all'A.: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio di Riemann* V_n *ad* n *dimensioni* ($n > 4$, $n \neq 8$) *ammetta un gruppo di movimenti ad* $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ *parametri occorre e* *basta che* V_n *sia il prodotto di una retta per uno spazio di Riemann ad* $n-1$ *dimensioni a curvatura costante, oppure che* V_n *sia a curvatura costante negativa.* L'interesse del teorema non è solamente nella caratterizzazione della V_n, ma anche nelle condizioni alle quali soddisfare la dimensione n.

Chiude il volume una breve ma chiara appendice nella quale dopo aver ricordato i concetti di varietà a struttura analitica complessa e quasi-complessa e quelle di metrica hermitiana e kähleriana, quasi-hermitiana, e quasi-kähleriana, sono riportati i concetti di varietà pseudo-complessa, pseudo-hermitiana e pseudo-kähleriana e sono dati i primi teoremi sui vettori pseudo-analitici.

Osserviamo infine che, grazie sopratutto ai primi cinque capitoli, la lettura del volume non presuppone che poche nozioni che rientrano nella normale cultura generale.

CARMELO LONGO

LIBRI RICEVUTI

BERGMANN L., *Schwingende Kristalle,* pp. 51, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953.

BREIDENBACH W., *Das Delische Problem,* pp. 59, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953.

BROCKMEYER E. - HALSTROM H. L. - JENSEN A., *The life and works of. A. K. Erlang,* pp. 257, The Copenhagen Telephone Company, 1948.

CURIE M. SKLODOWSKA, *Oeuvres,* pp. 682, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1954.

DEVIENNE M., *Condensation et adsorption des molécules sur une surface en atmosphère raréfiée,* pp. 84, Mèm. Sci. Phys. Fasc. LIII, Gauthier - Villars, Paris, 1952.

FISZ M.,*Rachunek prawdopodobienstwa i statystyka matematyczna,* pp. 374, Panstwowe Wydawnictwo naukowe Warszawa, 1954.

HASSE H - KLOBE W., *Aufgabensammlung zur höheren Algebra,* pp. 179, *Sammlung Göschen Bd.* 1082, Walter de Gruyter e Co., Berlin, 1952.

ICKERT J., *Das Genauigkeitswesen in der technischen Normung,* pp. 92, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

LEVI H., *Elements of Algebra,* pp. 160, Chelsea Publishing Company, New York, 1954.

LIETZMANN, *Riesen und Zwerge in Zahlenreich,* pp. 59, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953.

MIKUSINSKI J., *Rachunek operatorow,* pp. 368, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa, 1953.

NATUCCI A., *Sviluppo teorico dell'aritmetica generale e dell'algebra,* pp. 353, Pellerano, Napoli.

OSTROWSKI A., *Vorlesungen über differential und integralrechnung III°,* pp. 462, Verlag Birkhäuser, Basel, 1954.

ROHRBERG A., *Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes,* pp. 64, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953.

ROTHE R., *Höhere Mahematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure,* Teil V, Teil VI, pp. 124, pp. 251, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954.

ROUARD P., *Propriétés optiques des lames minces solides,* pp. 82, Mém. Sci. Phys. fasc. LIV, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

ROUARD P., *Applivations optiques des lames minces solides,* pp. 51, Mém.. Sci. Phys., fasc. LV, Gauthier-Villars, Paris. 1952.

SIERPINSKI W., *Trojkaty Pitagorejskie,* pp. 94, Panstwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1954.