

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

UGO CASSINA

## Storia ed analisi del “Formulario completo” di Peano. Nota I.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 10*  
(1955), n.2, p. 244–265.

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1955\\_3\\_10\\_2\\_244\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_244_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## SEZIONE STORICO-DIDATTICA

### Storia ed analisi del « Formulario completo » di Peano.

Nota I di UGO CASSINA (a Milano)

**Sunto.** - *L' A., in una serie di tre Note, fa la storia e l'analisi del « Formulario completo » di G. PEANO, che ha avuto ufficialmente cinque edizioni — dal 1895 al 1908 —, ma i cui primi fascicoli di saggio rimontano al 1892 e che abbraccia in complesso una ventina di lavori, pubblicati da G. PEANO dal 1888 al 1913.*

*L' A. espone i passi originali di G. PEANO sul progetto e l'attuazione del « Formulario », analizza successivamente i cinque tomi di esso, e termina con l'elenco e la spiegazione sommaria dei simboli dell'ultima edizione e con dati statistici comparativi.*

#### § 1 - Sulle varie parti del « Formulario completo ».

Il « Formulario completo » di G. PEANO, i cui primi fascicoli di saggio sono usciti come supplementi alla « Rivista di matematica » del 1892, si compone ufficialmente di cinque edizioni o tomi, stampati dal 1895 al 1908: i primi tre intitolati « Formulaire de mathématiques » il quarto « Formulaire mathématique » ed il quinto « Formulario mathematico ».

La lingua usata per le spiegazioni ed i commenti delle formule simboliche è il francese per i primi quattro volumi ed il latino *sine-flexione* (introdotto dal PEANO stesso nel 1903) per il quinto.

A questi volumi si suole aggiungere l'opuscolo « Notations de logique mathématique », che porta anche il sottotitolo « Introduction au Formulaire de mathématiques », scritto da G. PEANO nel 1894.

Ma, per avere l'elenco completo delle opere collegate al « Formulario mathematico » (ed. V), e costituenti con esso un tutto orga-

nico di proposizioni di logica o di matematica scritte completamente sotto forma ideografica, conviene aggiungerne alcune altre. D'altra parte il tomo II è uscito in tre fascicoli autonomi, negli anni 1897, 1898, 1899, cosicchè le opere di G. PEANO che — secondo me — costituiscono nel loro complesso il *Formulario completo* sono le seguenti (elencate in ordine cronologico e ciascuna indicata con la sigla F e l'anno di pubblicazione, secondo un sistema già adottato da G. PEANO).

- F 1888, *Calcolo geometrico*, Torino. Bocca 1888.
- F 1889, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino, Bocca 1889.
- F' 1889, *I principii di geometria logicamente esposti*, Torino, Bocca 1889.
- F 1890, *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*, « Math. Annalen, 37 (1890), p. 182.
- F 1891, *Principii di logica matematica*, « Rivista matematica » = « RdM », 1 (1891), p. 1.
- F' 1891, *Formole di logica matematica*, « RdM », 1 (1891), p. 24, p. 182.
- F'' 1891, *Sul concetto di numero*, « RdM », 1(1891), p. 87, p. 256.
- F 1894 = F., *Notations de logique mathématique (Introduction au Formulaire de mathématiques)*, Turin, tip. Guadagnini, 1894.
- F' 1894, *Sur la définition de la limite d'une fonction (Exercice de logique mathématique)*, « Amer. Journ. of Math. », 17 (1894), p. 37.
- F 1895 = F. I = F<sub>1</sub>, *Formulaire de mathématiques*, tome I, publié par la « Rivista di matematica », Turin, Bocca et Clausen, 1895.
- F 1896, *Introduction au tome II du Formulaire de mathématiques*, « RdM », 6 (1896), p. 1.
- F<sub>0</sub> 1897, *Studi di logica matematica*, Atti Accad. di Torino, 32 (1897), 4 aprile, p. 565.
- F 1897 = F. II § 1, *Formulaire de mathématiques*, tome II § 1, *Logique mathématique*, par G. Peano, Turin, Bocca et Clausen, 11 · VIII · 1897.
- F 1898 = F. II § 2, *Formulaire de mathématiques*, tome II § 2, *Arithmétique*, par G. Peano, Turin, 9 · VIII · 1898.
- F 1899 = F. II n. 3, *Formulaire de mathématiques*, tome II, n. 3, publié par la « Revue de Mathématiques » (Rivista di matematica) direttore G. Peano, Turin, Bocca et Clausen, 1899.

- F 1900, *Formules de logique mathématique*, « RdM », 7 (1900), p. 1.  
 F 1901 = F. III, *Formulaire de mathématiques*, tome III, publié par G. Peano, Paris, Carré et Naud, 1901.  
 F 1903 = F. IV, *Formulaire mathématique*, éd. de l'an 1902-03, tome IV de l'éd. complète, Turin, Bocca et Clausen, 1903.  
 F 1908 = F. V, *Formulario mathematico*, edito per G. Peano, editio V (Tomo V de Formulario completo), Torino, fratres Bocca editores, 1908.  
 F 1913, *Recensione* di « A. N. Whitehead e B. Russell, Principia mathematica », Boll. bibl. e storia delle scienze mat. (Loria), 1913, p. 47, p. 75, (che deve essere ricordata per la teoria delle relazioni ivi abbozzata da G. Peano per tradurre nel suo linguaggio ideografico alcune delle proposizioni del libro recensito).

## § 2 - Progetto del Formulaire.

Nel 1891, G. PEANO, aveva terminato il suo primo ciclo di studi di logica matematica, che lo avevano portato a dimostrare l'equivalenza fra il calcolo delle proposizioni (condizionali) e quello delle classi, ed a fare l'analisi completa dei concetti di logica che figurano nei ragionamenti matematici.

Questa analisi era stata resa possibile mediante l'introduzione dei simboli  $\epsilon$  e  $\nu$  (F 1890), che permettono di distinguere la classe composta di un solo individuo dall'individuo stesso, la cui confusione — fatta fino allora — portava ad assurdi: in particolare impediva la distinzione fra le relazioni di « esser membro », di « esser contenuto » e di « eguaglianza », rappresentate rispettivamente dai simboli  $\epsilon$   $\supset$   $=$ .

G. PEANO aveva pure analizzato (F 1889) — sebbene sotto forma ancora incompleta (come vedremo in seguito) — il concetto di « funzione » (o di « operazione » o « legge » secondo il linguaggio ordinario) ed aveva svolto una prima teoria matematica del calcolo delle proposizioni (categoriche o condizionali) nel primo fascicolo della sua « Rivista di matematica » (F 1891, F' 1891), ed aveva scoperto ed enunciato chiaramente le regole a cui dovevano soddisfare le definizioni e le dimostrazioni matematiche (F' 1889).

Terminato questo primo ciclo di studi di logica, ecco, G. PEANO, rivolgere la sua mente alla trattazione matematica della logica e, viceversa, all'applicazione della sua ideografia logica allo studio dei principii della matematica; ed inoltre a sviluppare, come con-

sequenza della sua ideografia logica, un'ideografia matematica che permetta di dare forma ideografica completa ad ogni proposizione di matematica.

Come applicazione immediata di una tale ideografia matematica egli pensò di fare una « raccolta di formule » o « Formulario » in cui però le cosiddette « formule » dovevano essere, in verità, proposizioni *complete*, in cui, cioè, oltre alle eventuali ordinarie formule del linguaggio misto usuale, dovevano essere enunciate esplicitamente le condizioni della loro validità ed il significato delle lettere in esse contenute.

Ecco quanto scrive G. PEANO in un supplemento, del mese di marzo 1892, della sua « Rivista di matematica » e ripubblicato poco dopo nella stessa rivista (v. 2, p. 76):

*« Sarebbe cosa della più grande utilità il pubblicare delle raccolte di tutti i teoremi ora noti riferentesi a dati rami delle scienze matematiche, sicchè lo studioso non abbia che a confrontare siffatta raccolta onde sapere quanto fu fatto sopra un dato punto, e se una sua ricerca sia nuova ovvero no.*

*« Una siffatta raccolta, difficilissima e lunga con il linguaggio comune, è notevolmente facilitata servendoci delle notazioni della logica matematica; e la raccolta dei teoremi su un dato soggetto diventa forse meno lunga della sua bibliografia.*

*« Le tavole che seguono contengono un tentativo di questa raccolta. La parte I contiene i teoremi, le identità, ecc., riferentesi alle operazioni sui numeri reali. La parte II contiene gli elementi della teoria dei numeri.*

*« Sono sommariamente ricordate le notazioni usate, il cui preciso significato è spiegato in alcuni articoli nel volume I della Rivista.*

*« Queste tavole sono, per ora, delle prove di stampa. La numerazione delle proposizioni e la divisione in § è provvisoria.*

*« Noi facciamo caldo appello ai lettori della Rivista affinchè esaminino queste formule, e comunichino alla Rivista tutte quelle che essi conoscono e non trovano comprese nel formulario; come pure tutte quelle correzioni ed osservazioni del caso.*

*« In seguito queste formule saranno stampate separatamente. Gli abbonati della Rivista le riceveranno gratuitamente.*

*« Saremo poi gratissimi ai lettori che ci vorranno aiutare in questo lavoro, raccogliendo le proposizioni (con o senza dimostrazioni) di altri punti della matematica ».*

L'appello di G. PEANO fu accolto da una certa schiera di lettori — in genere giovani laureati, di cui alcuni furono suoi assistenti (F. CASTELLANO, nell'anno 1890-91, G. VAILATI, negli anni 1892-1893-1894, e C. BURALI-FORTI negli anni 1894-1895-1896) — ; e così è sorto il tomo I del Formulario (F 1895), che è uscito nel 1895, come opera della « Rivista di matematica », preceduto però dall'opuscolo di G. PEANO del 1894 (F 1894), in cui venivano spiegate le notazioni di logica ed erano esposte tante altre cose interessanti, anche se, in parte, poi non usate nel formulario.

### § 3 - Il tomo I del Formulario.

Esaminiamo ora un po' più da vicino questo tomo I del Formulario (F 1895).

Il volume, che è risultato di VII pagine di prefazione e di 144 pagine di testo, di cui 30 (p. 115-144) dedicate alle aggiunte e correzioni ed agli indici, è diviso nei seguenti capitoli :

I. *Logique mathématique*, II. *Opérations algébriques*, III. *Aritmétique*, IV. *Théorie des grandeurs*, V. *Classes de nombres*, VI. *Théorie des ensembles*, VII. *Limites*, VIII. *Séries*, IX. *Contribution à la théorie des nombres algébriques*.

I primi tre capitoli senza nome esplicito di autore, perchè per la loro redazione G. PEANO si era servito (specialmente per quanto riguarda le notizie storiche e bibliografiche) della collaborazione di G. VAILATI, F. CASTELLANO e C. BURALI-FORTI; il IV dovuto a C. BURALI-FORTI, il V a G. PEANO, il VI a G. VIVANTI, il VII a R. BETTAZZI, l'VIII a F. GIUDICE ed il IX a G. FANO.

G. PEANO ha avuto certo la sensazione che l'opera non era riuscita perfetta (nè poteva esserlo in un primo tentativo), perchè scriveva esplicitamente nella prefazione (p. III) :

« *Mais, quel que soit le soin apporté par l'Auteur d'une partie, on pourra y rencontrer des fautes et des lacunes, notamment dans une première édition. D'autre part il est à peu près impossible à une seule personne de compulsier tous les livres, de vérifier toutes les indications historiques à cet égard. Nous publierons dans la « Rivista di Matematica » et dans les volumes suivants du Formulaire, toutes les additions et les corrections qu'on nous indiquera. On pourra de même republier une partie qui aurait déjà paru, après l'avoir perfectionnée.* »

Aggiunge — per i collaboratori futuri — le norme da seguirsi, che credo importante riprodurre quasi totalmente, perchè si con-

staterà la loro applicazione integrale nelle successive edizioni del Formulario. In particolare richiamo l'attenzione sulle regole 7 e 9 così saggie — specialmente la 9 — e così dimenticate da tanti autori del giorno d'oggi!

(p. III-IV):

« 1. La seule loi qui règle les notations du Formulaire, c'est qu'elles soient les plus simples et les plus précises, pour représenter les propositions dont il s'agit.

« 2. Les notations sont un peu arbitraires, mais les propositions sont des vérités absolues, indépendantes des notations adoptées.

« 3. Toutes les fois qu'on traduit en symboles une nouvelle théorie, on introduira des signes nouveaux pour indiquer les idées nouvelles, ou les nouvelles combinaisons des idées précédentes, qu'on rencontre dans cette théorie.

« 4. La réduction d'une nouvelle théorie en symboles, exige une analyse profonde des idées, qui figurent dans cette branche; avec les symboles on ne peut pas représenter des idées non précises.

« 5. On ne doit pas représenter par un signe nouveau toute idée indiquée par un mot simple dans le langage ordinaire. Ce point constitue une différence importante entre le langage ordinaire et les notations de la logique mathématique.

« 6. On introduira une notation nouvelle, au moyen d'une définition, lorsqu'elle apporte une notable simplification. On ne formera pas une notation nouvelle, lorsqu'on peut déjà représenter la même idée simplement par les notations précédentes.

.....  
 « 7. On introduira une notation nouvelle seulement si la simplification qu'elle apporte se rencontre dans une suite de propositions. On ne formera pas une théorie avec des définitions.

« 8. Toutefois, il est bien de former une table des noms du langage ordinaire qu'on ne traduit pas par un symbole simple, mais qu'on décompose dans une combinaison de signes.

« 9. Si l'on n'a pas ce soin, on aura les mêmes propositions écrites plusieurs fois, sous des formes différentes, dont on ne reconnaît pas tout de suite l'identité. Quelquefois on présente comme un théorème ce qui n'est qu'une identité.

« 10. Toute définition est exprimée par une égalité; dans le premier membre on a le signe qu'on définit, qui est ou un signe nouveau, ou une nouvelle combinaison des signes connus; dans le second on a sa valeur. Il faut que les deux membres soient homo-

gènes ; ils doivent contenir les mêmes lettres variables. Toutefois on peut sousentendre dans le signe qu'on définit quelque lettre variable, si elle a une valeur constante dans une suite de propositions.

« 11. Nous invitons nos collaborateurs de prendre les lettres variables sous la forme *a, b, ..., x, y, z*, en italique et de représenter les idées dont la valeur est constante, par les combinaisons des lettres *a, b, ...*, en romain, par des majuscules et par des lettres grecques.

« 12. Il n'y a pas de confusion possible à représenter par une même lettre des idées différentes dans des propositions différentes. Car au commencement de chaque proposition, il faut toujours dire la signification des lettres variables.

(p. VI-VII):

« 20. Après avoir écrit une formule en symboles, il convient d'appliquer à la formule quelques transformations de logique. On verra ainsi, s'il est possible de la réduire à une forme plus simple ; et l'on reconnaît facilement si la formule n'est pas bien écrite.

« 21. Car les notations de logique ne sont pas seulement une tachygraphie, pour représenter sous une forme abrégée les propositions de mathématiques ; elles sont un instrument puissant pour analyser les propositions et les théories.

« 23. Dans la numération des propositions d'un §, il est bien de ne pas adopter la suite continue des nombres, mais de laisser des lacunes ; on y écrira les propositions à ajouter.

« 24. Il est bien de reproduire les indications historiques qu'on rencontre dans les livres, sans les vérifier toutes, car cela exige un long travail, que pourra faire un autre collaborateur.

« 25. On peut aussi publier les démonstrations des propositions, ou au moins les liens qui subsistent entre les propositions d'une suite. Mais la transformation en symboles d'une démonstration est en général plus difficile que l'énonciation d'un théorème ».

La regola 23 è stata il germe della notazione decimale — incominciata ad introdurre in F 1898, ma usata integralmente a partire da F 1899 (ed adottata in seguito da A. N. WHITEHEAD e B. RUSSELL, da L. WITTGENSTEIN, e da altri), e la cui utilità si rileva appena si voglia far seguire i teoremi dalle loro dimostrazioni, citando esattamente le proposizioni che si invocano nella dimostrazione stessa ; perchè la notazione decimale permette di

inserire, al posto giusto, nelle successive edizioni del Formulario, proposizioni nuove senza essere costretti ad alterare tutte le citazioni della vecchia edizione.

A proposito della regola 24 è bene leggere subito quanto scrisse G. PEANO alcuni anni dopo (1897) — quando volle assumersi direttamente anche la responsabilità della revisione delle notizie storiche (Riv. di Mat., 6, p. 83):

*« Le indicazioni storiche sia sulle proposizioni, come sulle notazioni, utili sempre, sono utilissime nel Formulario, perchè riposano un po' il lettore, e manifestano meglio l'importanza delle proposizioni, e spesso il vantaggio della ideografia. Ma anch'esse richiedono molto lavoro per poter avere un qualche valore. Le indicazioni che trovansi nei libri delle generazioni passate, e ancora in qualche libro moderno, secondo cui per es. l'Algebra è dovuta a Des Cartes, o a Viète, o ai matematici italiani del secolo XIII, o agli arabi, o agli indiani, o ai greci, non hanno alcuna precisione. Nè l'ha ad es. l'affermazione più precisa che l'uso delle lettere sia dovuto a Viète, trovandosi esse in Aristotele, e di uso comune in Euclide, come risulta dalle citazioni contenute nel Formulario.*

*« Nè possono essere utili per noi indicazioni della forma: « Il segno + è dovuto a Leonardo da Vinci ». L'esame d'una frase siffatta importa un lunghissimo lavoro; da cui risulta che effettivamente il segno + fu usato da questo scienziato per indicare la cifra 4; e l'attribuire a questi l'uso del segno + vale quanto attribuirlo al primo abitante delle caverne che abbia incisa una croce. Simile è la citazione di Widman.*

*« Le indicazioni poi che portano con precisione il nome dell'Autore, e la pagina del libro citato, passando per più mani, a causa degli errori materiali accumulati, spesso sono inesatte; e invano si cerca al posto indicato il passo in questione. Altre volte lo si trova, ma ha un senso ben diverso da quello che gli attribuiva lo storico.*

*« In conseguenza si è dovuto rimontare all'origine dei passi citati; le citazioni del F portano le indicazioni precise, in modo che chiunque possa facilmente confrontare il libro citato; e spesso si riporta il passo citato. Ciò finchè fu possibile; perchè anche nel F alcune citazioni attendono di essere meglio precisate.*

*« Si badi poi che le indicazioni storiche contenute nel F non pretendono punto di rimontare alla prima origine della P in questione; ma solo di indicare un A. ove essa si trova. Uno studio ulteriore potrà sempre sostituire ad esse altre citazioni relative ad epoca più antica ».*

Le correzioni ed aggiunte ad F 1895 — fatte mentre il volume era in corso di stampa — vennero riportate in fondo al volume (p. 115-126), mentre alcune note introduttive ai singoli capitoli trovarono posto nei seguenti volumi della « Rivista di matematica » : 3 (1893), p. 1, p. 75, p. 185, p. 186, p. 188 ; 4 (1894), p. 33, p. 135, p. 161, p. 163 ; 5 (1895), p. 1.

Nella copia di F. I, contenente osservazioni marginali manoscritte del PEANO, che trovasi (legata insieme ai tomi II e III del Formulario completo ed altri opuscoli), nella Biblioteca matematica dell'Università di Milano (n. 2366 d'inventario), a pag. 134, in margine, di mano di G. PEANO, figurano le seguenti osservazioni : » *i segni di  $F_1$  sono 162 (di cui circa 25 di logica) ed « i segni che si possono sopprimere facendo la 2<sup>a</sup> edizione delle parti I, II, III, V-VIII, sono circa 68. Ne rimangono circa un centinaio ».*

Da cui risulta come, in questo tomo I del Formulario, siano state poco seguite (da alcuni collaboratori) le regole 5-6-7 testè riportate.

#### § 4 - Il tomo II del Formulario.

1. *L'introduzione al tomo II del Formulario.* — Senza indugio, G. PEANO, inizia la redazione del tomo II del Formulario, incominciando con lo scriverne l'*Introduction* (F 1896), pubblicata nella « Rivista di matematica » (v. 6, 1896, p. 1-4).

In tale introduzione, dopo l'accenno al problema di LEIBNIZ di creare una « Spécieuse Générale » (o « caratteristica universale ») ove « ogni ragionamento dovrebbe essere ridotto ad una specie di calcolo », problema che — com'è ben noto — in G. W. LEIBNIZ restò allo stato di progetto e venne ritenuto un « sogno » dal marchese de l'HOSPITAL e da altri a cui ne aveva parlato, G. PEANO, conscio dell'importanza della sua scoperta, scrive (p. 2) :

« *Après deux siècles, ce « songe » de l'inventeur du Calcul infinitésimal est devenu une réalité ...*

« *Dans le petit livre « Arithmetiques principia, nova methodo exposita a. 1889 », nous avons pour la première fois exposé toute une théorie, théorèmes, définitions et démonstrations, en symboles qui remplacent tout-à-fait le langage ordinaire.*

« *Nous avons donc la solution du problème proposé par Leibniz. Je dis « la solution » et non « une solution », car elle est unique. La Logique mathématique, la nouvelle science composée de ces recherches, a pour objet les propriétés des opérations et des relations de*

*logique. Son objet est donc un ensemble de vérités, et non de conventions ».*

Poi — sempre nella detta introduzione (F 1896) — G. PEANO passa ad occuparsi della seconda edizione del Formulario e del fine da raggiungere, e scrive il passo seguente (che converrebbe tener presente anche al giorno d'oggi se si volesse riprendere e continuare la sua opera).

*« (p. 3-4) : Or il est possible de publier un Formulaire de Mathématiques qui contienne toutes les propositions connues dans les sciences mathématiques, toutes les démonstrations, toutes les méthodes. Elles, écrites en symboles, occupent peu de place, beaucoup moins qu'on ne pourrait croire. Il y a une infinité de livres et de Mémoires inutiles, erronés, ou dans lesquels on répète ce que d'autres auteurs ont déjà dit. Ce qui reste à écrire dans le Formulaire n'est qu'une partie infiniment petite de ce qu'on a publié jusqu'à présent.*

*« Je suppose ce formulaire terminé, ou près de l'être. Veut-on étudier un sujet quelconque? On ouvre ce Formulaire à la place convenable car on peut ordonner les sujets selon les signes qui les composent, comme on ordonne dans un dictionnaire les mots selon les lettres qui les constituent. On trouvera en quelques pages toutes les vérités connues sur ce sujet, avec leurs démonstrations et indications historiques. Si le lecteur connaît encore une proposition, qu'il a découverte, ou qu'il a trouvée, dans quelque livre, ou s'il remarque quelque inexactitude dans ces propositions, il communiquera ces additions et corrections à la Rédaction du Formulaire, qui l'annoncera dans quelque publication périodique, et en tiendra compte dans une édition suivante.*

.....

*« Ce projet est assurément beau. Malheureusement son exécution surpasse les forces, non d'un homme, mais de plusieurs hommes. Seulement une société nombreuse et bien organisée pourrait l'accomplir.*

*« En attendant que quelque société savante s'empare de ce projet, nous avons publié, avec la collaboration de plusieurs collègues, le I tome du Formulaire.*

*« Car il n'est pas nécessaire que tout ce travail soit fini pour porter son avantage. Chaque partie publiée sert déjà aux étudiants de ces sujets particuliers.*

*« Ce premier essai présente naturellement des lacunes. Nous commençons maintenant le II volume du Formulaire; et nous publions*

*de nouveau les parties du I tome, sur lesquelles on nous a indiqué de nombreuses corrections et additions ».*

2. *Il tomo II § 1 = F 1897.* - Enunciato così il programma del tomo II, passa alla sua attuazione, incominciando con la revisione completa delle formule di logica contenute nel I capitolo di F. I.

In F. I egli prendeva come primitivi i concetti di « proposizione categorica » (senza variabili) e di « proposizione condizionale » (cioè con una o più variabili); ora prende come concetto primitivo quello di « classe », per cui introduce il simbolo  $K$  (divenuto poi  $Cls$ ). Ciò gli permette di definire i concetti di « proposizione condizionale » e di « proposizione categorica » (per i quali però non introduce nessun simbolo speciale), e di eliminare l'inconveniente, constatato in F. I, di dover enunciare a parole il significato di alcune lettere.

Avendo poi riconosciuto la necessità di introdurre l'idea primitiva di « coppia ordinata », egli introduce a tale scopo il segno « ; » (talvolta sostituito con « , »).

Pur con l'uso di questa idea primitiva in più, che permette di distinguere — com'è necessario — fra proposizioni ad *una* variabile e proposizioni a *due* (o più variabili), la teoria matematica della logica, così costruita da G. PEANO, è fondata su un numero minore di proposizioni primitive rispetto alla precedente.

Questa teoria (F 1897) venne pubblicata, in fascicolo a parte, col titolo « *Logique mathématique* », come paragrafo I del tomo II del Formulario, sotto la data 11.VIII, 1897, che era quella del I Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Zurigo.

A tale congresso G. PEANO, presentò il suo lavoro, suscitando vivo interesse — tra gli altri — nel giovane B. RUSSELL, che, affascinato da tal genere di ricerche, doveva poi dedicare alcuni anni della sua vita giovanile agli studi di logica matematica che lo portarono, in collaborazione con A. N. WHITEHEAD, alla stampa dei celebri « *Principia mathematica* ».

G. PEANO, giustifica nella « *Rivista di matematica* » (v. 6, genn. 1898, p. 48) le profonde modifiche da lui apportate alla redazione già esposta in F. I perchè — egli scrive — (p. 48):

*« Ciò parmi necessario, poichè il Formulario è il risultato della collaborazione di molti colleghi; quindi bisogna provare che in ogni nuova compilazione nulla si è tralasciato di quanto c'era nella compilazione precedente, salvo ciò che si deve tralasciare ».*

E così espone la corrispondenza completa fra le proposizioni di  $F_1 I$  e di  $F 1897$  dando ragione delle modificazioni fatte. In particolare scrive (pag. 48):

« in  $F_1 I$  § 1-3 [=  $F 1895$ ] si è detto (pag. 127), col linguaggio ordinario, che le lettere a, b, ... indicano, in queste formule, delle proposizioni. Volendosi scrivere in simboli anche il significato delle lettere, affinchè le formule abbiano un'espressione simbolica completa, si è partiti, invece che dal concetto di proposizione, da quello di classe, come già si era fatto in  $F_1 I$  § 4. In conseguenza fu necessario cambiare la forma di parecchie proposizioni ».

(pag. 49): « In questa nuova pubblicazione si è invece fatta l'analisi delle idee primitive ( $P 1-7$ ) e delle derivate ( $P 11-18$ ). (V. i miei *Studii di Logica matematica*, *Atti Acc. Torino*, 1897). Si sono aggiunte le  $P 22, 32, 38, 56$ . Si è cambiato il sistema delle  $Pp$  riducendo il loro numero di due unità; e si sono aggiunte le  $P 61-63$ , le  $70-74$  sulla coppia di enti, e le  $80-85$  sull'eguaglianza ».

E conclude (p. 52):

« Il § 1 di  $F_2$  [=  $F 1897$ ] contiene in 15 pagine circa 260 proposizioni, trovate da vari Autori, con scopi diversi. Queste  $P$  hanno importanza fra loro assai differente. Chi desidera apprendere i simboli di logica onde leggere i lavori in cui se ne fa uso, basta che conosca le notazioni e definizioni  $P 1-18, 100-102$ , ecc.; e più precisamente basta conoscere le definizioni di quei soli segni che si incontrano in quel determinato lavoro.

« Chi desidera usarli, è bene conosca le proprietà fondamentali delle operazioni logiche indicate da questi segni; queste proprietà sono enunciate dalle proposizioni importanti, indicate col segno \*. Queste  $P$  bastano per dare un'idea chiara dello scopo della Logica matematica.

... « Una notevole riduzione nel numero delle  $P$  si potrebbe ottenere col sopprimere alcuni segni.

... « Così, ad esempio, i quattro segni  $\supset = \wedge \mathfrak{E}$ , sono riduttibili l'uno all'altro; sicchè ogni forma di ragionamento è scritta nel  $F$  quattro volte sotto forma diversa. Pure la pratica prova la convenienza di conservare, almeno per ora, tutti quei segni, ciascuno dei quali ha i propri vantaggi; e la ripetizione delle proposizioni, a causa della compattezza, non porta ingombro ».

3. Il tomo II § 2 =  $F 1898$ . - Un anno dopo, sotto la data 9 agosto 1898, viene pubblicato da G. PEANO il secondo fascicolo

del tomo II del suo *Formulario*, col titolo « *Arithmétique* » (F, § 2 = F 1898); fascicolo autonomo, perchè contiene un estratto del fascicolo precedente (F 1897) sufficiente a chiarire le notazioni di logica usate. In questo estratto, entra, per la prima volta nel *Formulario* il simbolo  $\mathbb{E}$ , introdotto da G. PEANO l'anno prima nella sua Nota sugli studi di logica (F<sub>0</sub> 1897), e che doveva mostrarsi così utile in seguito.

Nel volume 6 della sua « *Rivista di matematica* » (p. 75), G. PEANO, commenta F 1898 e ne fa il confronto con le redazioni precedenti della stessa materia (*aritmetica*), specialmente con gli « *Arithmetices principia* » (F 1889), con lo scritto « *Sul concetto di numero* » (F'' 1891), e col tomo I del *Formulario* (F 1895), parti II, III, V e VI.

Fra le modifiche introdotte in F 1898, rispetto ai lavori precedenti, conviene segnalare la prima comparsa dello « 0 » (zero) al posto di « 1 » fra i concetti primitivi dell'aritmetica.

Accennando poi alla parte VI (*teoria degli insiemì*) — già redatta da G. VIVANTI —, G. PEANO, scrive (p. 81):

*« Delle due notazioni  $\omega$  e  $Nc$ , dovute rispettivamente al Cantor ed al Vivanti, si è conservata solo la seconda, perchè più semplice « ... (p. 82) »: In F<sub>1</sub> VI § 2 la P 1 diventa la nuova 210 · 1. La P 2 si potrà rimettere quando se ne continui la teoria. Ma le successive definizioni non soddisfano alle leggi delle definizioni simboliche « . . . ». Parimenti la P 7 contiene non solo nel primo membro dell'eguaglianza, ma anche nel secondo, un segno non noto; cosa del resto ben avvertita dall'A. in RdM, a. 1894, p. 136.*

*« In conseguenza, queste P e le successive non possono essere riportate nel Formulario, finchè qualcuno non le abbia riordinate, dando definizioni puramente simboliche, e non aventi bisogno del linguaggio ordinario per essere intese ».*

Conviene pure leggere quanto scrive sui « *risultati nuovi* » che possono trovarsi nel *Formulario* (Riv. di mat., v. 6, p. 85):

*« Il Formulario ha indirizzo puramente scientifico. I risultati nuovi contenuti in esso non sono già i teoremi, dovuti ad Autori spesso antichissimi, ma lo studio della loro dipendenza; l'affermazione e la prova che una determinata idea si possa o non si possa definire, che una data proposizione si possa dimostrare o meno, e la raccolta delle varie definizioni, dimostrazioni e teorie possibili, è ciò che contiene di nuovo il F; e alla soluzione di questi problemi è necessaria la Logica matematica quale qui fu costruita, o uno strumento equivalente da costruirsi ».*

Esempi di tal genere di « novità » sono: la distinzione esplicita fra « funzione *definita* » e « funzione *non definita* », di cui parlerò fra poco, e che è contenuta nel tomo II, n. 3 (F 1899); e molte dimostrazioni riportate nel tomo II e nei tomi successivi, specialmente nel tomo V: come la dimostrazione della serie binomiale, del teorema di CAUCHY sulle serie di potenze, ecc. e — specialmente — la dimostrazione del teorema esistenziale di PEANO sui sistemi di equazioni differenziali.

G. PEANO è cosciente delle lacune che ancora presenta il Formulario che sta commentando (F 1898 = F. II §. 2, *Arithmétique*), specie per quel che riguarda le dimostrazioni, ed invita alla collaborazione « ogni studioso della matematica » e dà alcuni nuovi indirizzi ed incoraggiamenti per la collaborazione al Formulario assicurando tra l'altro che: « chiunque prenda la cosa pel giusto verso, avrà una buona occasione di istruzione e di vero divertimento » (Riv. di mat., v. 6, p. 88).

Termina pubblicando un saggio di « Regolamento » del Formulario, in cui sono riprese alcune norme già pubblicate nella prefazione al tomo I (F 1895), che però qui assumono una forma più rigida. Basterà ricordarne alcune (Riv. di mat., v. 6, p. 88):

« 1. Il Formulario di Matematiche ha per scopo di pubblicare tutte le proposizioni, dimostrazioni e teorie, man mano che esse sono espresse coi simboli ideografici della Logica matematica; come pure le indicazioni storiche relative... »

« 3. Le *P* a inserirsi nel *F* debbono essere completamente scritte con simboli ideografici. L'*A.* può usare quelli prima introdotti; ne può introdurre dei nuovi, per esprimere le idee nuove che si incontrano nella teoria che intraprende a trattare. In nessun caso può dare ai simboli attuali un significato diverso da quello che ora hanno in *F*. Chi vuole alterarne il significato, dovrà cambiarne, anche leggermente, la forma.

« 4. Ogni proposizione riconosciuta inesatta, qualunque sia la causa dell'errore, sarà cancellata; salvo a ristamparla corretta. Una definizione che non soddisfi alle leggi delle definizioni simboliche, o che non sia intelligibile senza l'aiuto del linguaggio comune, o dia luogo ad ambiguità, sarà esclusa dal Formulario, insieme a tutte le *P* in cui se ne fa uso.

« 5. La nota storica d'ogni *P* indica il più antico lavoro in cui chi propone la nota incontrò la *P*. Una stessa *P* può portare più indicazioni storiche, corrispondenti a civiltà diverse, ovvero ad *A.* che successivamente la generalizzarono e la perfezionarono. Altri-

menti ogni citazione annulla le posteriori. È bene che le citazioni siano tali da permettere a chiunque di consultare facilmente l'opera originale; i passi citati più importanti si possono anche riportare».

4. *Il tomo II § 3 = F 1899.* - Passa ancora un anno, ed ecco uscire il fascicolo terzo ed ultimo del tomo II del Formulario (F 1899 = F<sub>2</sub> N 3).

Esso è un volume autonomo, che riproduce pressochè integralmente il paragrafo 2 (F 1898), con le aggiunte e correzioni suggerite dai collaboratori e pubblicate nella « Rivista di matematica » (v. 6, 1898, p. 51, p. 65); mentre riproduce solo le parti essenziali del § 1 (F 1897), tralasciando ogni discussione e teoria matematica della logica.

In F 1899 è applicata, per la prima volta, la numerazione decimale sistematica delle proposizioni, indicando cioè ogni proposizione con un numero che ha una parte intera ed una decimale (« dans le but de faciliter l'interpolation », p. 3) ed indicando con l'asterisco il cambiamento della parte intera.

E, in F 1899, compaiono per la prima volta i simboli « F Variab Funct » di cui — specialmente del primo — si era dimostrata la necessità (riconosciuta in una nota marginale della copia, già citata, di F 1898, p. 41) per poter distinguere l'idea di « funzione » intesa come operazione a campo di applicabilità determinato o « definito » (come suol dirsi), da quello di « funzione » intesa come operazione a campo di applicabilità indeterminato o « non definito ».

Per es. il simbolo « cos » indica — sotto forma di operatore a sinistra (o segno di « prefunzione ») la funzione « coseno », mentre il simbolo « cos,  $0^{1-}2\pi$  » indica la funzione « coseno » *definita* nell'intervallo  $0^{1-}2\pi$ . A questa corrisponde (come diagramma cartesiano) una curva ben determinata, alla prima no. Solo per le funzioni *definite* si può parlare di *eguaglianza* e di *invertibilità*. Ed il concetto di funzione « definita » è quello che interviene, per es., in tutto il calcolo differenziale.

Ebbene, il simbolo « F », introdotto in F 1899 (p. 28), serve a rappresentare le funzioni *definite* (mediante i loro segni di prefunzione) come già il simbolo « f » (introdotto in questa forma in F 1894, p. 27, ma usato sotto altra forma fin da F 1889) serviva a rappresentare le funzioni *non definite* (mediante i loro segni di prefunzione).

Il simbolo « Variab » serve a rappresentare il campo di applicabilità della funzione definita (o di « variabilità » della variabile); il simbolo « Funct » indica poi l'insieme delle funzioni definite.

Da notare inoltre che, in F 1899, i simboli di logica, e la grande maggioranza di quelli di matematica, assumono la forma *definitiva*.

In particolare è introdotto (p. 114) il simbolo « Lm » per indicare la classe limite di una funzione — introdotta da G. PEANO nel 1892 (Riv. di mat., v. 2, 1892, p. 77), — mentre è conservato il simbolo « lim » per indicare l'ordinario limite, che G. PEANO ottiene dalla classe precedente quando essa contiene un solo elemento.

Ma veniamo a parlare della parte matematica di F 1899, che è molto più ampia di quella esposta nel tomo I, pur non contenendo i capitoli sulle grandezze (IV) ed i numeri algebrici (IX), dovuti rispettivamente a G. BURALI-FORTI ed a G. FANO.

I capitoli di matematica trattati in F. 1899 sono i seguenti:

I. *Arithmétique*, II. *Limites*, III. *Nombres complexes*, IV. *Vecteurs*, V. *Dérivées*, VI. *Intégrales*.

Fra quanto scrive in proposito G. PEANO (nella prefazione ad F 1899) conviene leggere le seguenti righe (p. 4):

*« Dans les théories des limites et des séries, § lim, nous avons profité des travaux publiés par MM. R. Bettazzi et F. Giudice da s F<sub>1</sub> N 7 et F<sub>1</sub> N 8 [= F 1895, VII, VIII]. Les autres parties sont en général réduites ici en symboles pour la première fois ».*

Egli viene, con ciò, a dichiarare di aver curato personalmente tutta la nuova edizione del Formulario, pur tenendo conto dei suggerimenti dei collaboratori vecchi e nuovi, i quali ultimi si sono in generale limitati a rilevare errori materiali di stampa o ad aggiungere qualche nuova proposizione. Eccettuato, G. VACCA, allora suo assistente, che — secondo la dichiarazione esplicita di G. PEANO (p. 4) — « *l'a puissamment aidé dans tout ce travail* », ed a cui: « *on doit les citations des manuscrits de Leibniz sur la Logique mathématique, qu'il a consultés à Hannover, et la bibliographie générale* », che chiude il volume (p. 190-198).

Sono quindi dovute a G. PEANO (p. 182-186) la tavola dei segni ed una tavola dei nomi più comuni che si incontrano nelle scienze matematiche, relativi a soggetti trattati nel Formulario, ma che non hanno simbolo corrispondente, essendo inutile (e di tali nomi egli ne registra circa 134).

G. PEANO, nei margini della pag. 186, della copia già segnalata della Biblioteca di Milano, conta questi segni distinguendoli in simboli di algebra antica (42), di algebra nuova (51), di logica antica (4), di logica nuova (17), di simboli ch'egli dice « abbre-

viativi» riferentesi alla parte geometrica qui aggiunta per la prima volta (12), e di pure abbreviazioni di scrittura (22).

In totale risulterebbero così 126 simboli di logica e di matematica. In verità egli ne ha trascurato qualcuno (io ne ho contato circa 150).

Tuttavia pur con l'aumento notevole della materia trattata, il numero dei simboli che in F 1895 era di circa 162 ora in F 1899 è di circa 150. Ciò non ostante, sempre nei margini della copia citata, egli indica alcuni simboli (3) da eliminare nella futura edizione del Formulario.

Il cap. IV (*Vecteurs*), che è il primo dei capitoli aggiunti ad F 1899, contiene i fondamenti della geometria secondo la teoria fondata sul concetto di « vettore », svolta da G. PEANO in una sua Nota dell'anno precedente (1898), teoria che è perciò profondamente diversa da quella già sviluppata in F' 1889.

Il cap. V (*Dérivées*) contiene ampi passi originali di LEIBNIZ e di NEWTON, sulle regole di derivazione e di JOH. BERNOULLI, TAYLOR e MAC LAURIN, sulla cosiddetta serie di TAYLOR.

Il cap. VI (*Intégrales*), che è l'ultimo di F 1899, è fondato sulle nozioni di integrale superiore ed inferiore, introdotti entrambi attraverso le sole nozioni di limite superiore ed inferiore (d'una classe di numeri), secondo il procedimento indicato da G. PEANO, fin dal 1884, e ripreso nel 1895.

Le aggiunte e correzioni ad F 1899 vennero pubblicate — secondo la promessa — nella « Rivista di matematica » (v. 7, sotto la data 20. VII. 1900) e di esse venne tenuto conto nella edizione del tomo III del Formulario.

### § 5. - Il tomo III del Formulario

Terminata la seconda edizione del Formulario, G. PEANO, ritornò allo studio matematico della logica e così sorse la memoria F 1900, pubblicata nella « Rivista di matematica » (v. 7, 20 luglio 1900, p. 1-41), che contiene una nuova teoria matematica completa della logica (diversa da quella di F 1897) oltre a schizzi di altre teorie possibili.

Questa teoria doveva entrare pressochè al completo nel tomo III del Formulario (F 1901), quello che figura edito a Parigi nel 1901 (pur essendo, come al solito, composto e stampato a Torino), e che fu ampiamente recensito da L. COUTURAT.

Questo tomo III del Formulario differisce quindi profondamente dal tomo II per la parte di logica, invece — per quanto riguarda la parte di matematica — ne differisce lievemente: cioè solo per piccole aggiunte e spostamenti vari nell'ordinamento delle singole parti, che, in F III, sono le seguenti:

I. *Logique mathématique*, p. 1-38; II. *Arithmétique*, p. 39-120; IV. *Fonctions analytiques*, p. 121-159; IV. *Nombres complexes*, p. 160-191; V. *Vecteurs*, p. 192-209.

Seguono la tavola dei simboli (p. 210-212), il vocabolario matematico (p. 213-216), l'elenco delle pubblicazioni citate (p. 217-218), la bio-bibliografia (p. 219-230) ed infine l'indice sistematico (p. 251).

A proposito dell'ordinamento della materia, conviene leggere quanto scriveva G PEANO nel suo commento di  $F_2$ , § 2 (= F 1898) pubblicato nella « Rivista di matematica » (v. 6, 1898, p. 82):

*« I termini « Aritmetica, Algebra, Teoria dei numeri », non esprimono punto scienze con confini nettamente definiti. Chi fa cominciare l'Algebra coll'uso delle lettere chi coi numeri negativi. Da nazione a nazione questi termini cambiano affatto significato; e in una nazione stessa i vari A. attribuiscono loro senso differente. Ciò che si chiama « ordine logico » non è spesso che una abitudine più o meno invalsa ».*

Il tentativo di trovare un ordine « logico » spiega il cambiamento nell'ordine, e nel raggruppamento in capitoli, dei singoli paragrafi del Formulario, che si notano nel passaggio da un'edizione all'altra.

Da osservare, in F. III, l'aggiunta esplicita (p. 41), ivi fatta per la prima volta, del postulato «  $N_0$  e  $Ols$  » (i numeri interi assoluti formano una classe), di collegamento dell'aritmetica con la logica, perchè, egli scrive (p. 41): (questo postulato) « *non nécessaire selon les conventions de F 1889 le devient par les conventions actuelles* ».

In F. III è pure aggiunta la teoria della sostituzione lineare  $k$  (p. 174), sui complessi di secondo ordine, e sono enunciati alcuni dei teoremi trovati da G. PEANO nella sua Nota sulle trasformazioni lineari di vettori in un piano (1895). In totale i simboli di F. III sono 160, di cui 28 di logica e 132 di matematica.

Le aggiunte e correzioni ad F 1901, dovute a una decina di autori, vennero pubblicate nella « Rivista di matematica » (v. 7, a. 1901, p. 85-110; p. 173-184; v. 8, a. 1902, p. 44) e riportate nell'edizione successiva del Formulario: la quarta.

### § 6. - Il tomo IV del Formulario.

Il tomo IV dell'edizione completa del Formulario (F. IV = F 1903) venne pubblicato a Torino nell'anno 1903. Esso è di mole notevolmente maggiore dei tomi precedenti (p. XVI + 407) ed ha un titolo leggermente diverso: « Formulaire mathématique ».

G. PEANO, nella prefazione (p. VII), presenta il nuovo volume dicendo che esso contiene: 1) le teorie fondamentali già pubblicate nel tomo III, salvo le teorie secondarie che non hanno avuto ulteriore sviluppo; 2) le nuove teorie e le aggiunte al tomo III, già pubblicate nella « Rivista di matematica » nei volumi 7 ed 8 (cfr. § precedente), da 10 collaboratori (di cui G. PEANO riporta il nome); 3) le aggiunte apportate al tomo IV stesso durante la sua stampa (avvenuta tra il febbraio 1902 e il marzo 1903).

Tali aggiunte, dovute a 22 collaboratori, di cui G. PEANO riporta il nome completo ed il luogo di residenza, occupano le pagine 313-366 del volume.

A queste seguono la bibliografia e la tavola dei nomi citati nel Formulario (p. 368-392), anche stavolta dovute a G. VACCA, di cui il PEANO conferma il grande aiuto (p. IX: « *M. Vacca nous a de nouveau puissamment aidé dans ce volume* »).

Il volume termina con un « vocabolario matematico » (p. 393-406), dovuto a G. PEANO, che riproduce con aggiunte varie quello già pubblicato in F. III, p. 213-216. L'ultima pagina del volume (p. 407) contiene l'indice sistematico della materia.

Nelle pagine I-XV, invece, oltre alla prefazione (p. I-IX) sono contenuti degli « esercizi di logica matematica » (p. X-XVI), che hanno per scopo di facilitare lo studio del Formulario ai lettori che « conoscono già le scienze matematiche, ma non possono approfittare d'un insegnamento orale di logica matematica ».

G. PEANO, nella prefazione di F. IV (p. VIII) scrive:

*« Le Formulaire maintenant, par l'abondance des propositions, des indications historiques et bibliographiques, joue le rôle d'une Encyclopédie. Toutes les idées du Formulaire sont introduites par des définitions régulières. Dans plusieurs théories les propositions sont accompagnées de la démonstration (et aussi de plusieurs démonstrations). Il est donc possible d'extraire du Formulaire des cours d'enseignement; ce que nous avons fait, p. ex., pour l'Arithmétique ».*

G. PEANO accenna anche alla difficoltà della stampa del Formulario, per cui occorre la stessa cura che per una tavola di logaritmi ma maggior fatica, ed al modo con cui essa procede — cioè conservando la composizione dei tomi precedenti su cui

vengono di mano in mano eseguite le correzioni segnalate — cosicchè (p. VIII): « *il est donc difficile de trouver des erreurs dans les pages qui sont arrivées à une seconde édition* ».

Credo qui utile ricordare (per chi non lo sapesse) che G. PEANO assunse anche la direzione tecnica della esecuzione tipografica del Formulario, che veniva composto a mano — sotto la sua direzione e spesso con la sua collaborazione attiva, avendo egli voluto apprendere l'arte tipografica — nella piccola tipografia che egli aveva impiantato nella sua modesta villa di Cavoretto (presso Torino) per la stampa della « *Rivista di matematica* » (1).

Il materiale composto veniva portato per la stampa ad una tipografia di Torino, ed ogni foglio di stampa (di 16 pagine l'uno) veniva di solito munito della data di pubblicazione.

Così apprendiamo che il secondo foglio venne stampato l'anno 1902 d. 48 (= 17 febbraio) e che il ventiseiesimo (ed ultimo) venne stampato l'anno 1903 d. 72 (= 13 marzo); di qui l'origine dell'indicazione: « *édition de l'an 1902-03* » che figura nel frontispizio.

F. IV è diviso in paragrafi raggruppati in capitoli. Ciascun paragrafo ha per titolo un segno ideografico, od un insieme di segni, il cui ordine è determinato da ragioni logiche o storiche.

Qui mi limiterò a dare l'elenco degli 11 capitoli di F. IV ed a fare qualche osservazione generale sul contenuto di F. IV e sulle differenze principali da F. III. Ecco l'elenco dei capitoli:

- I. *Logique mathématique*, p. 1-28, § 1-9;
- II. *Arithmétique*, p. 29-52, § 10-15;
- III. *Théorie des nombres*, p. 53-74, § 16-30;
- IV. *Algèbre*, p. 75-104, § 31-41;
- V. *Nombres réels*, p. 105-122, § 42-52;
- VI. *Fonctions définies*, p. 123-144, § 53-61;
- VII. *Calcul infinitésimal*, p. 145-200, § 62-72;
- VIII. *Nombres complexes*, p. 201-224, § 73-76;
- IX. *Fonctions circulaires*, p. 225-250, § 77-79;
- X. *Calcul géométrique*, p. 251-286, § 80-82;
- XI. *Géométrie différentielle*, p. 287-312, § 83-93;

*Additions*: p. 313-366, § 1-80, § 81.1, § 83.1, § 85.1.2, § 94, § 95.

La parte di logica matematica è in sostanza la stessa di F. III, ma qui, per la prima volta, le proposizioni di logica non sono tutte premesse alla parte matematica, ma enunciate solo all'inizio dei capitoli in cui se ne avrà bisogno.

(1) Cfr. U. CASSINA, *Vita et opera de Giuseppe Peano*, « *Schola et Vita* », 7(1932), p. 117-148, § 5.

Inoltre, in F. IV, figura in più rispetto ad F. III, il simbolo « V » (per la classe totale); c'è invece in meno il segno « Funct », che però sarà ripreso in F. V.

La parte di matematica contenuta in più in F. IV, rispetto ad F. III, riguarda: le frazioni continue, il calcolo delle differenze, il calcolo delle probabilità, la geometria elementare con lo studio delle proiezioni ortogonali e dei movimenti (intesi come trasformazioni geometriche), il calcolo geometrico dedotto dal calcolo vettoriale ed il calcolo geometrico dell'indirizzo di GRASMANN-PEANO sviluppato secondo le tracce di F 1888 (con la riduzione delle formazioni geometriche dei vari gradi a forma canonica e relativa interpretazione geometrica o meccanica), le applicazioni geometriche del calcolo differenziale allo studio della curva (reale) descritta da un punto mobile (asse del piano osculatore, centro di curvatura, curvatura, torsione, formole di FRÉNET, ecc.); la nozione di piano tangente ad una superficie e di figura tangente ad un insieme qualsiasi di punti; le nozioni di lunghezza, area e volume — inferiore, superiore e proprio — per le figure rettilinee, piane e spaziali, e le nozioni di area di una superficie curva e di lunghezza di una linea generica.

In F. IV figurano inoltre un ampio paragrafo di G. PEANO (§ 85 · 2) sulle applicazioni della geometria differenziale allo studio di una ventina di curve piane (determinando — tra l'altro — il centro di curvatura, la lunghezza l'area ed il volume di alcune figure di rotazione collegate con la curva); un breve paragrafo di C. BURALI-FORTI sulle singolarità (flessi, cuspidi di prima e seconda specie, ecc.) delle curve reali piane descritte da un punto mobile (in cui vengono esposti alcuni teoremi di PEANO pubblicati nelle sue « Applicazioni geometriche » del 1887), ed altri due brevi paragrafi di C. BURALI-FORTI sulle cicloidi ed epicycloidi e sulla curvatura e torsione.

Fra le proposizioni aggiunte in F. IV sono notevoli le definizioni di *area* di una superficie curva e di *lunghezza* di una linea generica, che G. PEANO dà imitando quelle di BORCHARDT e MIKOWSKI (p. 300-302). Tali definizioni (che erano già comparse nella « Rivista di matematica » (v. 7, 15 luglio 1901, p. 109) sono un po' più generali di quelle di detti autori: infatti quella di « area » vale per una qualsiasi figura (classe di punti) a « volume » nullo, e quella di « lunghezza » per una qualsiasi figura ad « area » nulla.

Da notare che i simboli adottati in F. IV per tali concetti (Area, Long) non sono opportuni, a causa della omonimia con gli stessi segni usati precedentemente (p. 298) nel caso di figure piane

e rettilinee. Ed invero, nel tomo V del Formulario, saranno sostituiti dai simboli nuovi « area » ed « arc ».

A pag. 300-301, di F. IV (nel foglio stampato l'anno 1902, d. 121), nella notizia storica sul concetto di area di una superficie curva, è riportato il celebre esempio che G. PEANO scoprì — contemporaneamente a A. H. SCHWARZ — per dimostrare l'errore della definizione di SERRET fino allora adottata <sup>(2)</sup>.

L'esempio è riportato in modo completo ed è indicata la data (22 maggio 1882) in cui G. PEANO espone per la prima volta la sua osservazione.

In totale i simboli di F. IV sono 216, che possono distinguersi così: 28 di logica, 188 di matematica (di cui 8 negli articoli di C. BURALI-FORTI).

Convieni segnalare fra i simboli di matematica, il segno « num » — introdotto in F'' 1891, riportato in F 1895 e F 1898, ma abbandonato in F 1899 e F 1901 — che rappresenta il numero cardinale definito per induzione; mentre il simbolo « Num » rappresenta (come già nel tomo precedente) il numero cardinale definito mediante la nozione di corrispondenza biunivoca.

In totale i simboli in più, rispetto ad F. III sono 56 di matematica ed 1 di logica (V), ed in meno 1 di logica (Funct).

Dei segni di matematica in più, 38 sono di analisi e di geometria, e 18 di calcolo geometrico.

---