Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Curzio

I gruppi finiti che sono somma di tre o quattro laterali di sottogruppi propri.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 228–232.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_228_0>

I gruppi finiti che sono somma di tre o quattro laterali di sottogruppi propri.

Nota di MARIO CURZIO (a Napoli) (*)

Sunto. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo finito* G *sia somma di tre laterali di suoi sottogruppi propri (non tutti coincidenti) è che* G, *senza essere ciclico d'ordine* 4, *possegga un sottogruppo d'indice* 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo finito* G, *sia somma di quattro laterali di suoi sottogruppi propri (non tutti coincidenti) è che* G, *senza essere ciclico d'ordine* 4 *o* 9, *possegga un sottogruppo di indice* 2 *o* 3.

In una nota (1) del 1926, G. SCORZA ha studiato i gruppi finiti, somma di tre loro sottogruppi, mentre recentemente (2) D. GRECO ha

(*) In memoria di MARIO DE FIDIO.

(1) G. SCORZA, *I gruppi finiti che possono pensarsi somma di tre loro sottogruppi*, «Bollettino U. M. I.», vol. V (1926), pp. 44-46.

(2) D. GRECO, *I gruppi finiti che sono somma di quattro sottogruppi*, «Rend. Acc. Fis. Mat. della Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Arti in Napoli», Serie IV, vol. XVIII (1951).

determinato i gruppi finiti, somma di quattro sottogruppi. Nella presente Nota, esamino i gruppi somma di tre e quattro laterali di sottogruppi propri non tutti coincidenti. La caratterizzazione che ne consegue, mi sembra non priva di qualche interesse, in quanto costituisce, in un certo senso, una generalizzazione dei risultati degli Autori predetti. Non ho considerato gruppi somma di due laterali di sottogruppi distinti, in quanto, come è facile a vedersi, non esistono gruppi per i quali possa sussistere una simile decomposizione.

1. Si abbia un gruppo finito G per il quale sia possibile una decomposizione del tipo $G=\sum_1^3{}_i A_i'$ con A_i' laterale d'un sottogruppo proprio A_i di G, vale a dire ogni elemento di G appartenga almeno ad uno degli A_i'. Escludiamo naturalmente il caso che gli A_i' siano laterali d'uno stesso sottogruppo di G. Dovendo inoltre nella decomposizione suddetta trovar posto almeno un laterale contenente l'unità e di G, tale laterale sarà un sottogruppo di G. Supporremo, per fissare le idee, che $A_1 \equiv A_1'$.

Ciò posto, sia n l'ordine di G, m l'ordine del più ampio fra i laterali A_i' e quindi dei sottogruppi A_i. Deve essere $m \geq n/3$; se $m > n/3$, G possiede un sottogruppo d'indice 2, mentre se, $m = n/3$, gli A_i' hanno tutti ordine $n/3$ e sono, a due a due, privi d'elementi di G in comune; sicchè indicando con 0 il laterale vuoto d'elementi di G:

(1) $$A_h' \cap A_k' = 0 \qquad (h,\ k = 1,\ 2,\ 3\,;\ h \neq k)$$

Con $m = n/3$ sono allora possibili i casi seguenti:

$a)$ $A_s' \equiv A_s \qquad (s = 2, 3)$.

Tale caso è da escludersi, poichè si avrebbe $A_1' \cap A_s' \supset e$ contro la (1).

$b)$ $A_s \neq A_s' \qquad (s = 2, 3)$.

In questa ipotesi potrà aversi:

I) $A_2 \equiv A_1$.

Vale a dire $G = A_1 + \gamma A_1 + A_3'$ con γ conveniente elemento di G.

Essendo anche: $G = A_1 + \gamma A_1 + g A_1$ con g elemento di G fuori di A_1 e γA_1, è $A_3' = g A_1$, cioè i sottogruppi A_i coincidono e tale caso è stato escluso in precedenza.

II) $A_3 \equiv A_1$.

Si ragiona come in I).

III) $A_2 \equiv A_3$.

Tale caso si riporta ancora al caso I), perchè se si ha $A_3' = \gamma A_2$, da $G = A_1 + gA_2 + \gamma A_2$ con g conveniente elemento di G, si deduce:

$$G = A_2 + \gamma^{-1} g A_2 + \gamma^{-1} A_1 .$$

IV) $A_h \neq A_k \qquad (h, k = 1, 2, 3 ; \ h \neq k)$.

Avendosi:

$$A_2 = (A_1' \cap A_2) + (A_3' \cap A_2)$$

ed essendo $(A_3' \cap A_2) = \gamma(A_2 \cap A_3)$ poichè è $A_1' \equiv A_1$, si ha [3]:

$$A_2 \equiv (A_1 \cap A_2) + \gamma(A_2 \cap A_3) .$$

Ciò comporta che $A_2 \cap A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$, valendo anzi il segno di uguaglianza, altrimenti la decomposizione sopra effettuata di A_2 non esaurirebbe tale sottogruppo, pertanto $A_1 \cap A_2$ ha indice 2 in A_2. Poichè:

$$H = A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

H ha indice 2 in ogni A_i, dunque H è normale in G che è l'unione degli A_i. Ricordando che ogni A_i ha indice 3 in G, il gruppo G/H ha ordine 6; dall'omomorfismo di G in G/H segue che G possiede un sottogruppo d'indice 2.

Le considerazioni fin qui svolte, provano che ove $G = \sum_1^3{}_i A_i'$, G possiede un sottogruppo d'indice 2. Essendo ovvio che ogni G avente un sottogruppo d'indice 2 ed un qualsiasi altro sottogruppo proprio, è suscettibile di una decomposizione del tipo considerato (sia pure sovrabbondante), si ha: « *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo finito* G *sia somma di tre laterali di suoi sottogruppi propri (non tutti coincidenti) è che* G, *senza essere ciclico d'ordine* 4, *possegga un sottogruppo d'indice* 2 ».

2. Sia ora $G = \sum_1^4{}_i A_i'$ con G finito e A_i' laterale d'un sottogruppo proprio A_i di G. Escludiamo, come in precedenza, che gli A_i' siano laterali d'uno stesso sottogruppo e supponiamo ancora $A_1 \equiv A_1'$.

(3) Gli elementi di G comuni ad un laterale aA ed un laterale bB sono tutti e soli gli elementi del tipo gh con g fissato elemento comune ai laterali dati e con h variabile in $A \cap B$.

Ciò posto, sia n l'ordine di G, m l'ordine del più ampio fra gli A_i'. Deve essere $m \geq n/4$; se $m > n/4$, G possiede un sottogruppo di indice 2 o 3, mentre se, $m = n/4$, gli A_i' hanno tutti ordine $n/4$ e sono a due a due privi di elementi di G in comune.

Supposto $m = n/4$ è da escludersi che per un $h \neq 1$, A_h' sia un sottogruppo, ciò si vede ragionando come in a) del num. 1. Parimenti è da escludersi che tre dei sottogruppi A_i coincidano, all'uopo basta opportunamente adattare le considerazioni del num. 1 relative ai casi b), I), II), III).

Quindi, se $A_s \neq A_s'$ $(s = 2, 3, 4)$, restano possibili i soli casi seguenti:

a) Due dei sottogruppi A_i coincidono.

Si abbia, per fissare le idee, che $A_1 \equiv A_2$. Allora con g, h e k opportuni elementi di G, sarà: $G = A_1 + gA_1 + hA_3 + kA_4$, donde: $G = A_3 + h^{-1}gA_1 + h^{-1}A_1 + h^{-1}kA_4$. Ciò comporta che gli elementi di A_1 si distribuiscano in A_3 e $h^{-1}kA_4$, cioè con γ opportuno elemento di G:

$$A_1 = (A_3 \cap A_1) + \gamma(A_1 \cap A_4).$$

Vale a dire che $A_3 \cap A_1 \equiv A_1 \cap A_4$ ha indice 2 in A_1 ed A_3; se uno di questi sottogruppi è massimo, $A_1 \cap A_3$ è normale in $G = A_1 \cup A_3$, e dall'essere d'ordine 8 il gruppo $G/A_1 \cap A_3$ segue che G possiede un sottogruppo d'indice 2. Se degli A_1, A_3 nessuno è massimo, dovendo esistere un sottogruppo H di G tale che $G \supset H \supset A_1$, si ha che H ha indice 2 in G.

La trattazione dei casi $A_2 \equiv A_3$ oppure $A_2 \equiv A_4$, ecc...., è del tutto analoga a quella precedente.

b) I sottogruppi A_i sono a due a due distinti.

Supponiamo in primo luogo che tra gli A_i, ve ne sia almeno uno meno ampio del proprio normalizzante, sia ad es. A_1. Allora o il normalizzante N_1 di A_1 coincide con G o è distinto da G. Nel primo caso A_1 è normale in G ed avendovi indice 4, G possiede un sottogruppo d'indice 2; nel secondo caso N_1 ha indice 2 in G.

Sia ora ogni A_i coincidente col proprio normalizzante N_i. Decomposto G nei laterali di A_i, si abbia:

$$G = A_i + A_i a_2 + A_i a_3 + A_i a_4$$

con a_2, a_3, a_4 opportuni elementi di G. Essendo $A_i \equiv N_i$, i sottogruppi A_i, $a_j^{-1} A_i a_j$ costituiscono una classe completa di sottogruppi coniugati, giacchè, come ben noto, due elementi di G trasformano A_i in un medesimo sottogruppo di G, se e solo se, appartengono ad uno stesso laterale di N_i. Poichè è inoltre $A_i a_j = a_j(a_j^{-1} A_i a_j)$, posto: $A_i = B_1$, $a_j^{-1} A_i a_j = B_j$, si ha:

$$G = B_1' + B_2' + B_3' + B_4'$$

con B_i' laterale di B_i e con $B_h' \cap B_k' = 0$.

Ora, ogni B_i è massimo; perchè in caso contrario avendo B_i indice 2 in ogni sottogruppo $H_i \supset B_i$, $H_i \neq B_i$ sarebbe il normalizzante di B_i, ciò che è assurdo.

Si ha ovviamente:

$$B_2 = (B_1 \cap B_2) + \gamma(B_2 \cap B_3) + \delta(B_2 \cap B_4)$$

con γ e δ opportuni elementi di G. Detto t il più grande tra gli indici in B_2 dei sottogruppi $B_1 \cap B_2$, $B_2 \cap B_3$, $B_2 \cap B_4$, sarà $t = 2$ o 3. Se $t = 2$, sia per esempio $B_1 \cap B_2$ d'indice 2 in B_2, sarà anche 2 l'indice di $B_1 \cap B_2$ in B_1; G possiede quindi un sottogruppo d'indice 2 essendo $B_1 \cap B_2$ normale in $B_1 \cup B_2 = G$ ed avendo $G/B_1 \cap B_2$ ordine 8. Se $t = 3$, (v. n. 1) o $B_1 \cap B_2$, $B_2 \cap B_3$, $B_2 \cap B_4$ coincidono o sono a due a due distinti. Nella prima eventualità $B_1 \cap B_2 = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 = H$, ha indice 12 in G e vi è normale essendo l'intersezione dei sottogruppi di una classe completa di sottogruppi coniugati, dall'omomorfismo di G in G/H, segue che G possiede un sottogruppo d'indice 3. Nel secondo caso, [v. num. 1 b), IV)], $H = (B_1 \cap B_2) \cap (B_2 \cap B_3) \cap (B_2 \cap B_4) = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$, ha indice 6 in B_2 e quindi indice 24 in G, come nel caso precedente si riconosce che H è normale in G e che G possiede un sottogruppo d'indice 3.

Le considerazioni fin qui svolte, provano che ove $G = \sum_1^4{}_i A_i'$, G possiede almeno un sottogruppo d'indice 2 o 3. Essendo ovvio che, se G possiede un sottogruppo d'indice 2 o 3 ed almeno un altro sottogruppo proprio, riesce possibile per G una decomposizione (sia pure sovrabbondante) del tipo considerato, si ha:

« *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo finito* G, *sia somma di quattro laterali di suoi sottogruppi propri (non tutti coincidenti), è che* G, *senza essere ciclico d'ordine* 4 *o* 9, *possegga un sottogruppo d'indice* 2 *o* 3 ».

Osserviamo infine che, come prevedibile, i gruppi caratterizzati da SCORZA (v. nota (1)) verificano le condizioni dell'enunciato finale del n. 1; mentre i gruppi (2) determinati da GRECO verificano le condizioni dell'enunciato di questo numero.