Bollettino
Unione Matematica Italiana

Lionello Cantoni

Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti nell'intorno di un punto unito.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 212–223.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_212_0>

Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti nell'intorno di un punto unito.

Nota di Lionello Cantoni (a Bologna)

Sunto. - *Come al n. 1.*

1. Nel presente lavoro si studia una trasformazione puntuale T fra due spazi S_r sovrapposti nell' intorno di un punto unito O, trattenendosi specialmente sul caso $r = 3$ (n. 4 e successivi) [1].

[1] Per lo studio di una trasformazione puntuale fra spazi lineari, si veda: M. Villa, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. I. *In-*

Si determinano riferimenti intrinseci e si assegna un significato geometrico degli invarianti.

In generale, per determinare il riferimento intrinseco basta l'intorno del 2° ordine di O; però se esiste un altro punto unito infinitamente vicino ad O occorre l'intorno del 3° ordine.

Si considera pure (n. 2 e 10) l'ipersuperficie L, luogo dei punti A per i quali esiste un iperpiano unito nell'omografia che T induce fra le stelle di centro il punto A e il suo corrispondente $\bar{A}$ in T (2). Questa ipersuperficie può servire a fissare intrinsecamente elementi del riferimento.

2. – Sia data una trasformazione puntuale T fra due spazi S_r, $\bar{S}_r$ sovrapposti, rappresentata dalle equazioni:

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_r) \qquad i = 1, 2, \dots, r \tag{1}$$

e chiamiamo A, $\bar{A}$ una generica coppia di punti corrispondenti in detta trasformazione.

Il luogo dei punti A, per i quali esiste un iperpiano unito nell'omografia ω che T induce fra le stelle di centro A e $\bar{A}$ è una ipersuperficie L la cui equazione si ottiene subito imponendo che un iperpiano per A contenga il punto $\bar{A}$, la retta $\bar{a}$ corrispondente (in ω) alla retta $a = A\bar{A}$, il piano $\bar{\pi}$ corrispondente al piano π individuato da a e $\bar{a}$ e così via. Indicando con J la matrice jacobiana delle (1), con J_{-1} la sua trasposta, con I la matrice

torno del 2° ordine. II. *Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci.* III. *Trasformazioni cremoniane osculatrici.* Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. (8) 4, 55-61, 192-196, 295-303 (1948). Al caso particolare del punto unito e per $r = 2$ sono dedicati i lavori: C. LONGO, *Trasformazioni puntuali nell'intorno di un punto unito.* Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. (8) 8, 320-325 (1950); M. VILLA, *Una cubica collegata ad un punto unito in una trasformazione puntuale.* Atti Acc. Ligure Sc. Lettere, 9, 1-11 (1952). Ricordo anche il lavoro di L. MURACCHINI: *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti,* questo Bollettino (3) 9, 360-366 (1954), nel quale si considerano trasformazioni puntuali fra piani sovrapposti, ma lo studio viene svolto nell'intorno di una coppia di punti corrispondenti distinti, nonchè quello recente di F. SPERANZA, *Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti,* questo Bollettino (3) 10, 61-68 (1955).

(2) Questo luogo, per $r = 2$, è già stato considerato. Si veda L. MURACCHINI, op. cit. in (1).

identica di ordine r e ponendo $f-x=(f_1-x_1, f_2-x_2, \dots, f_r-x_r)$ detta equazione è:

$$\left| \begin{array}{c} (f-x)I \\ \hline (f-x)J_{-1} \\ \hline (f-x)J_{-1}^2 \\ \hline \vdots \\ \hline (f-x)J_{-1}^{n-1} \end{array} \right| = 0 \text{ (3)}.$$

3. Sia $O \equiv \bar{O}$ un punto unito per la T e supponiamo che l'omografia che la T induce fra le stelle sovrapposte di centro O, sia generale. Assunte le r rette unite come assi coordinati, le equazioni di T nell'intorno di O sono:

$$\bar{x}_i = a_i x_i + \sum_{j,\,k=1}^{r} b_{jk}^{(i)} x_j x_k + [3] \qquad b_{jk}^{(i)} = b_{kj}^{(i)} .$$

Consideriamo la curva $\bar{C}$ corrispondente in T all'asse x_h e il suo piano osculatore. Questo piano interseca l'iperpiano $x_h = 0$ lungo una retta tale che se proiettiamo da un qualsiasi punto di essa i punti di $\bar{C}$ sull'asse x_h, la corrispondenza che così nasce fra i punti di x_h e le proiezioni dei corrispondenti è data da:

$$\bar{\lambda}_h = a_h \lambda_h + b_{hh}^{(h)} \lambda_h^2 + [3],$$

ove λ_h, $\bar{\lambda}_h$ rappresentano rispettivamente le ascisse sull'asse x_h di due punti corrispondenti. La precedente corrispondenza è osculata dalla proiettività σ_h: $\bar{\lambda}_h = \dfrac{a_h^2 \lambda_h}{a_h - \lambda_h b_{hh}^{(h)}}$ la quale, se è $a_h \neq 1$ ammette, oltre il punto O un ulteriore punto unito A_h. Assunto come *iperpiano improprio* quello determinato dagli r punti A_h $(h = 1, 2, \dots, r)$, si ha:

$$b_{hh}^{(h)} = 0 \qquad\qquad h = 1, 2, \dots, r.$$

Scegliendo poi come retta unità una retta caratteristica e su essa come punto unità il corrispondente (nella prospettività caratteristica che intercede fra i punti di detta retta e quelli della sua corrispondente in ω) del punto improprio della retta caratteristica corrispondente, si ha:

$$a_i = \sum_{jk}^{1\dots r} b_{jk}^{(i)} \qquad b_{jk}^{(i)} = b_{kj}^{(i)},\ i = 1, 2, \dots, r.$$

(3) Per il simbolismo adottato si veda ad es.: S. CHERUBINO, *Lezioni di Geometria Analitica con Elementi di Proiettiva*, p. II, cap. I. Genova, Dante Alighieri (1940).

Risulta quindi completamente fissato il riferimento intrinseco.

Un significato geometrico degli invarianti a_h del primo ordine, si ha subito osservando che le ∞^r omografie tangenti alla T in O, posseggono tutte come invarianti proiettivi assoluti, precisamente i numeri a_h. Per mezzo delle coppie di rette caratteristiche non adoperate per fissare il riferimento intrinseco, si ha poi un significato geometrico per gli invarianti del secondo ordine.

Se uno dei numeri a_h vale 1, la T possiede un ulteriore punto unito infinitamente vicino ad O e viene a cadere la precedente determinazione dell'iperpiano improprio; per fissare il rifemento è necessario far uso di elementi dell'intorno del 3° ordine di O. Se, per fissare le idee, si ha $a_1 = 1$, $a_i \neq 1$ $i = 2, 3, \dots, r$, si assumerà come iperpiano improprio, quello determinato dagli $r-1$ punti A_i $(i = 2, 3, \dots, r)$ e da un *punto caratteristico* ([4]) qualsiasi.

Se poi la ω non fosse generale, per fissare il riferimento è conveniente far uso di elementi della configurazione caratteristica, come vedremo per $r = 3$.

Si noti che se la ω è generale con tutte le $a_h \neq 1$, la ipersuperficie L ha un punto r-plo in O il cui cono tangente si spezza in r iperpiani che sono, nel riferimento fissato, quelli coordinati.

Nel seguito, supporremo sempre $r = 3$. Si possono allora distinguere per la ω i seguenti casi: 1) La ω è generale; 2) La ω è parabolica; 3) La ω è doppiamente parabolica; 4) La ω è un'omologia generale; 5) La ω è un'omologia speciale; 6) La ω è l'identità.

Nei numeri che seguono studieremo questi sei casi, distinguendo, per ciascuno di essi il sottocaso in cui la T possiede un punto unito infinitamente vicino ad O.

4. *La ω è generale.*

Se la T non possiede punti uniti infinitamente vicini ad O,

([4]) La nozione di *punto caratteristico*, discende subito da quella di E_3 *piano caratteristico*. Si consideri la V_{r-1} che corrisponde in T ad un iperpiano $\bar{S}_r$ individuato da $r-1$ direzioni caratteristiche. Secando questa varietà con un piano individuato da due direzioni caratteristiche di S_r (diverse da quelle che corrispondono in ω alle $r-1$ considerate) si ottiene una curva il cui E_3 si chiamerà E_3 *caratteristico* relativo alle $r+1$ direzioni caratteristiche considerate. I punti della tangente (in O) all'E_3 caratteristico che corrispondono nella proiettività che l'E_3 subordina fra i punti della tangente e le rette di fascio di centro O, alle due direzioni caratteristiche di S_r più sopra considerate, si diranno *punti caratteristici*. Si veda M. VILLA, la prima delle op. cit. in (1), II, n. 4.

dalle considerazioni svolte al n. 2 si hanno senz'altro gli sviluppi:

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + [3] \\ \bar{y} = by + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 + [3] \\ \bar{z} = cz + c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + [3] \end{cases}$$

con: $a_{22} = a - 2a_{12} - 2a_{13} - 2a_{23} - a_{33}$; $b_{33} = b - 2b_{12} - b_{11} - 2b_{13} - 2b_{23}$; $c_{11} = c - 2c_{12} - c_{22} - 2c_{13} - 2c_{23}$.

Un significato geometrico per gli invarianti a, b, c, si ottiene immediatamente osservando che le ∞^3 omografie tangenti in O alla T, posseggono tutte come invarianti proiettivi assoluti i tre numeri a, b, c (5). Si osservi che per mezzo delle sei coppie di rette caratteristiche non adoperate per fissare il riferimento intrinseco, si ha poi un significato geometrico per gli invarianti del secondo ordine.

Se uno dei tre numeri a, b, c, è $= 1$, il ragionamento fatto per fissare il riferimento intrinseco cade in difetto; sia ad es. $c = 1$ (e allora sarà necessariamente $a \neq 1$, $b \neq 1$), ne discende $A_3 \equiv 0$ e per fissare il riferimento intrinseco, l'intorno del secondo ordine di O non è più sufficiente. Si potrà allora assumere come piano improprio il piano determinato da A_1, A_2 e da un punto caratteristico. Si può anche procedere al modo seguente:

Si consideri la quadrica che contiene l'$\bar{E}_2$ corrispondente all'E_2 inflessionale:

$$\begin{cases} y = [3] \\ z = [3] \end{cases}$$

e l'$\bar{E}_3$ corrispondente all'E_3 inflessionale di 2ª specie

$$\begin{cases} x = [4] \\ y = [4] \end{cases}$$

che passa inoltre per A_2 ed è tale che rispetto ad essa, il piano $x = 0$ sia polare del punto A_1. Assunto come piano improprio il piano tangente in A_2 a questa quadrica (piano che necessariamente contiene anche A_1) e determinando quindi il punto unità come nel caso generale, si hanno le condizioni:

$$a_{11} = b_{22} = 0 \qquad \beta_{333} = 2b_{33}c_{33}$$

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} = a, \quad \sum_{i,k=1}^{3} b_{ik} = b, \quad \sum_{i,k=1}^{3} c_{ik} = 1 \qquad a_{ik} = a_{ik}, \; b_{ik} = b_{ki}, \; c_{ik} = c_{ki}$$

(5) Cfr.: M. Villa, il secondo dei lavori cit. in (1).

avendo indicato con β_{333} il coefficiente di z^3 nel secondo degli sviluppi locali di T.

Si hanno così le equazioni canoniche di T:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= ax + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + [3] \\
\bar{y} &= by + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 + \varphi_3(xyz) + [4] \\
\bar{z} &= cz + c_{11}z^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 + [3]
\end{aligned}$$

essendo: $a_{22} = a - 2a_{12} - 2a_{13} - 2a_{23} - a_{33}$; $b_{33} = b - 2b_{12} - b_{11} - 2b_{13} - b_{23}$ e $\varphi_3(x, y, z)$ una forma di terzo grado in x, y, z in cui il coefficiente della z^3 vale $2b_{33}c_{33}$ (6).

5. *La ω è parabolica.*

La ω ammetterà quindi due sole rette unite e due soli piani uniti.

Assunta la retta unita che giace in un sol piano unito come asse delle x, l'altra direzione come asse delle y, il piano unito che contiene una sola retta unita come piano $x = O$, le equazioni di T assumono l'aspetto:

$$\begin{cases}
\bar{x} = ax + [2] \\
\bar{y} = by + b'z + [2] \\
\bar{z} = cz + [2]
\end{cases}$$

assumendo inoltre come retta unità una retta caratteristica ed imponendo che la sua corrispondente nella ω sia una retta del piano $y = 0$, si ha:

$$b' = -b \quad b_{11} + 2b_{12} + b_{22} + 2b_{13} + 2b_{23} + b_{33} = 0$$

$$a(c_{11} + 2c_{12} + c_{22} + 2c_{13} + 2c_{23} + c_{33}) - b(a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + 2a_{13} + 2a_{23} + a_{33}) = 0.$$

Costruiamo le due proiettività σ_x, σ_y sui due assi x ed y. Supponendo $a \neq 1$, $b \neq 1$, dette proiettività sono non paraboliche e si possono determinare quindi, come fatto in generale, due punti A_1 ed A_2, uno per ciascun asse. Assunto come piano improprio quello determinato dai due punti A_1 ed A_2 nonchè dal centro della pro-

(6) Si osservi che se uno dei tre numeri a, b, c, è $= 1$, i sette centri delle prospettività caratteristiche cadono tutti sul piano coordinato che non contiene l'asse su cui si trova il punto unito infinitamente vicino ad O. (Il piano $z = 0$ nel presente caso). Infatti, indicata con (λ, μ, ν) una direzione caratteristica e con X_0, Y_0, Z_0 le coordinate del centro della relativa prospettività caratteristica, si hanno le relazioni: $(1 - c)\nu\gamma_0 = (1 - b)\mu z_0$; $(1 - a)\lambda z_0 = (1 - c)\nu x_0$; $(1 - b)\mu x_0 = (1 - a)\lambda\gamma_0$

$$\frac{b\mu z_0 - c\nu y_0}{\mu\nu(b - c)} = \frac{a\lambda y_0 - b\mu x_0}{\lambda\mu(a - b)} = \frac{c\nu x_0 - a\lambda z_0}{\lambda\nu(c - a)}$$

dalle quali segue subito quanto abbiamo annunciato.

spettività caratteristica relativa alla retta unità, si ha: $a_{11} = b_{22} = 0$

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} = \sum_{i,k=1}^{3} c_{ik} = 0 \qquad a_{ik} = a_{ki}\,,\ c_{ik} = c_{ki}\,.$$

Per fissare il punto unità, consideriamo la quadrica che è tangente al piano improprio nel punto all'infinito dell'asse z, che contiene gli $\bar{E}_2$ corrispondenti agli E_2 inflessionali:

$$\begin{cases} x = [3] \\ z = [3] \end{cases} \qquad \begin{cases} y = [3] \\ z = [3] \end{cases}$$

ed è tale che le sue tangenti asintotiche sul piano $z = 0$ dividano armonicamente i due assi x, y ed imponiamo a questa quadrica di contenere il punto unità (che resta così perfettamente fissato perchè è già stata data la retta unità). Si trova la condizione:

$$c_{22} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c_{11}).$$

Il riferimento intrinseco è così completamente fissato e si hanno per T i seguenti sviluppi canonici:

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + [3] \\ \bar{y} = b(y - z) + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 + [3] \\ \bar{z} = bz + c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 + [3] \end{cases}$$

con: $a_{33} = -a_{22} - 2(a_{12} + a_{13} + a_{23})$, $b_{33} = -b_{11} - 2(b_{12} + b_{13} + b_{23})$

$$c_{33} = \frac{b^2 - a^2}{a^2}c_{11} - b^2 - 2c_{12} - 2c_{13} - 2c_{23}\,,\quad c_{22} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c_{11}).$$

Per un significato geometrico degli invarianti dei primi due ordini si possono ripetere le stesse considerazioni fatte nel caso generale.

Se invece uno dei due numeri a, b è $= 1$, per fissare il riferimento intrinseco, bisogna ricorrere all'intorno del terzo ordine di 0.

Se $a = 1$, (con $b \neq 1$), allora resta ancora valida la costruzione del punto A_2, mentre $A_1 \equiv 0$. Per completare il riferimento intrinseco si può allora far uso di uno dei procedimenti indicati al n. prec. nel caso $c = 1$, oppure più semplicemente si può considerare la rete di quadriche che contengono l'$\bar{E}_2$ e l'$\bar{E}_3$ che corrispondono agli E_2, E_3 rispettivamente inflessionali di specie 1 o 2):

$$\begin{cases} x = [3] \\ z = [3] \end{cases} \qquad \begin{cases} y = [4] \\ z = [4] \end{cases}$$

e sono tali che le tangenti asintotiche sul piano xy dividono armonicamente i due assi. Il centro della prospettività caratteristica relativa alla retta unità determina tutta una stella di piani polari relativamente alle quadriche della rete considerata, il cui centro è un punto P distinto dall'origine (situato sull'asse x). Assunto come piano improprio quello determinato da A_2, da P e dal centro della prospettività caratteristica considerata, si ha:

$$b_{22} = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} = \sum_{i,k=1}^{3} b_{ih} = \sum_{i,k=1}^{3} c_{ik} = 0, \quad a_{ik} = a_{ki}, \; b_{ik} = b_{ki}, \; c_{ik} = c_{ki}, \; \gamma_{111} = 2a_{11}c_{11}.$$

Scegliendo poi il punto unità come nel caso $a \neq 1$ si ha la condizione $c_{22} = b^2(1 - c_{11})$.

Risulta così completamente fissato il riferimento intrinseco.

Nel caso $b = 1$ venendo a cadere anche la costruzione analoga alla precedente (poichè il centro della stella va a coincidere con l'origine), si dovrà ricorrere ad uno degli altri metodi a suo tempo indicati.

6. *La ω è doppiamente parabolica.*

Assumiamo l'unica retta unita come asse delle x, l'unico piano unito come piano $z = 0$, una retta caratteristica come asse z, la retta che corrisponde a questa nella ω come retta unità del piano $x = 0$, e infine la retta che corrisponde all'asse y come retta unità del piano $z = 0$. Le equazioni di T assumono corrispondentemente l'aspetto:

$$\begin{cases} \bar{x} = a(x + y) + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + [3] \\ \bar{y} = a(y + z) + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + a_{33}z^2 + [3] \\ \bar{z} = az + c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 + [3] \end{cases}$$

Si può considerare la proiettività σ_x sull'asse x e se $a \neq 1$ il suo punto unito A_1 fuori dall'origine. Assunti A_1 e il centro C della prospettività caratteristica relativa all'asse z quali punti impropri, si ha intanto $a_{11} = b_{33} = 0$. Consideriamo la curva $\bar{Y}$ corrispondente in T all'asse y e proiettiamo i suoi punti dalla retta A_1C sull'asse y. Ad ogni punto M dell'asse y, viene a corrispondere, mediante la T, un punto $\bar{M}$ di $\bar{Y}$ e a questo un punto M' dell'asse y mediante l'indicata proiezione e la corrispondenza fra le ascisse dei punti M, M' è rappresentata dalla equazione:

$$y' = ay + \left(b_{22} - \frac{a}{a-1}\, c_{22}\right) y^2 + [3].$$

Assunto come ulteriore punto improprio il punto unito distinto dall'origine della proiettività che oscula la considerata corrispondenza, si ha la condizione: $c_{22} = \frac{a-1}{a} b_{22}$. Si consideri ora la quadrica che è tangente al piano xy nell'origine con tangenti asintotiche che dividono armonicamente gli assi x e y, contiene l' $\bar{E}_2$ corrispondente all' E_2 inflessionale: $x = [3]$ $z = [3]$ e passa per il punto improprio della retta $x = 2y = 2z$ (si noti che il riferimento sul piano improprio è già completamente fissato). Imponendo a questa quadrica di contenere il punto unità si ha $c_{11} = -\frac{1}{3} a^2$.

Il riferimento intrinseco risulta così completamente fissato e rispetto ad esso si hanno per T i seguenti sviluppi (canonici):

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= a(x+y) + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + [3] \\
\bar{y} &= a(y+z) + b_{11}y^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + [3] \\
\bar{z} &= az - \frac{a^2}{3}x^2 + 2c_{12}xy + \frac{a-1}{a} b_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + [3]
\end{aligned}$$

e si può dare agli invarianti dei primi due ordini, il consueto significato.

Se $a = 1$, per fissare il riferimento intrinseco bisogna ricorrere all'intorno di terzo ordine di O e si potrà applicare uno dei procedimenti esposti nei numeri precedenti nei casi particolari allora trattati.

7. *La ω è una omologia generale.*

Assunta la retta sostegno del fascio di piani uniti come asse z, il piano dell'omologia come piano $z = 0$ è come rette unità sui due piani $x = 0$ ed $y = 0$, due rette caratteristiche, le equazioni di T assumono l'aspetto:

$$\left\{\begin{aligned}
\bar{x} &= ax + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + [3] \\
\bar{y} &= ay + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 + [3] \\
\bar{z} &= bz + c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 + [3]
\end{aligned}\right.$$

con:

$$b_{11} + 2b_{13} + b_{33} = a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = 0, \quad a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = c_{11} + 2c_{13} + c_{33}$$
$$b_{22} + 2b_{23} + b_{33} = c_{22} + 2c_{23} + c_{33}.$$

Si possono costruire sui tre assi le tre proiettività $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ già più volte considerate e se $a \neq 1$, $b \neq 1$ esse risulteranno tutte non paraboliche. Preso allora come piano improprio quello determinato dai tre punti $A_1A_2A_3$ si ha: $a_{11} = b_{22} = c_{33}$.

Considerando poi la quadrica che è tangente al piano improprio nel punto all'infinito dell'asse z, contiene i due $\bar{E}_2$ corrispondenti agli E_2 inflessionali: $x = [3]$, $z = [3]$; $y = [3]$, $z = [3]$ tale inoltre che le sue tangenti asintotiche sul piano xy dividano armonicamente i due assi ed imponendo ad essa di contenere il punto unità, si ha la condizione: $c_{11} = a^2 - c_{22}$.

Il riferimento è così completamento fissato e le equazioni canoniche di T sono:

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + 2a_{11}xy - 2(a_{13} + a_{23})y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}y^2 - 2a_{13}z^2 + [3] \\ \bar{y} = ay - 2(b_{13} + b_{23})x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}y^2 - 2b_{23}z^2 + [3] \\ \bar{z} = by + (a^2 + 2c_{23})x^2 + 2c_{12}xy - 2c_{23}y^2 - (a^2 + 2c_{23})xz + 2c_{23}y^2 + 2c_{33}z^2 + [3] \end{cases}$$

Per gli invarianti a e b, si ha il consueto significato (cioè quali invarianti proiettivi assoluti delle ∞^3 omografie tangenti alla T in 0) mentre le rimanenti cinque coppie di rette caratteristiche danno un significato geometrico agli invarianti del secondo ordine.

Se uno dei due numeri a, b è $= 1$, per fissare il riferimento intrinseco si potrà ricorrere (facendo uso di elementi dell'intorno del terzo ordine di 0) ad uno dei metodi già esposti in altri casi.

8. *La ω è un'omologia speciale.*

Assunto il piano di omologia come piano xy, il sostegno del fascio di piani uniti come asse x, come retta unità sul piano xz la corrispondente di quest'ultima nella ω e come retta unità del piano zy un'altra retta caratteristica, le equazioni di T si scrivono:

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + az + a_{11}x^2 + 2a_{12}yx + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + [3] \\ \bar{y} = ay + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}y^2 + [3] \\ \bar{z} = az + c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}y^2 + a_{33}z^2 + [3] \end{cases}$$

con

$$a_{22} + 2a_{23} + a_{33} = b_{22} + 2b_{23} = c_{22} + 2c_{23} + a_{33}.$$

Costruite al modo solito le due proiettività σ_x, σ_y sugli assi x ed y e i relativi punti A_1A_2, (nell'ipotesi $a \neq 1$) ed assunti come punti impropri questi due ultimi punti nonchè il centro della prospettività caratteristica relativa all'asse z, si ha:

$$a_{11} = b_{22} = a_{33} = 0.$$

La determinazione del punto unità può farsi del tutto identicamente a quanto fatto nel caso della omologia generale e si ottiene la condizione: $c_{11} = a^2 - c_{22}$.

Con questo resta completamente fissato il riferimento intrinseco e si hanno per T i seguenti sviluppi canonici:

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + az + 2a_{12}xy + 2(b_{23} - a_{23})y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + [3] \\ \bar{y} = ay + b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + [3] \\ \bar{z} = az + [a^2 + 2(c_{23} - b_{23})]x^2 + 2c_{12}xy + 2(b_{23} - c_{23})y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + [3] \end{cases}$$

agli invarianti dei primi due ordini potendo darsi il consueto significato geometrico. Il caso $a = 1$ si tratta con uno dei procedimenti già esposti nei n. precedenti.

9. *La ω è l'identità.*

Se tutte le direzioni per O sono unite, scelte come assi x, y, z e come retta unità, quattro rette caratteristiche, le equazioni di T si scrivono:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ax + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + [3] \\ \bar{y} &= ay + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + [3] \\ \bar{z} &= az + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 + [3] \end{aligned}$$

con

$$a_{11} + 2(a_{12} + a_{13} + a_{23}) = b_{22} + 2(b_{12} + b_{13} + b_{23}) = c_{33} + 2(c_{12} + c_{13} + c_{23}).$$

Supposto $a \neq 1$, le quattro proiettività caratteristiche relative ai tre assi ed alla retta unità sono non paraboliche. Assunto come piano improprio quello che contiene i tre punti uniti sui tre assi distinti dall'origine e come punto unità il punto unito relativo alla quarta proiettività, si ha

$$a_{11} = b_{22} = c_{33} = a_{12} + a_{13} + a_{23} = b_{12} + b_{13} + b_{23} = c_{12} + c_{13} + c_{23} = 0$$

Il riferimento intrinseco e così completamente fissato e si hanno le equazioni canoniche di T:

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz - 2(a_{12} + a_{13})yz + [3] \\ \bar{y} = ay + 2b_{12}xy - 2(b_{12} + b_{23})xz + 2b_{23}yz + [3] \\ \bar{z} = az - 2(c_{13} + c_{23})xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + [3] \end{cases}$$

con il consueto significato per gli invarianti.

Se poi $a = 1$, converrà assumere come piano improprio quello determinato da tre punti caratteristici e come punto unità il corrispondente nella relativa proiettività caratteristica del punto all'infinito della retta unità considerato come appartenente ad una delle due punteggiate sovrapposte.

10. Aggiungiamo alcune considerazioni sul comportamento della superficie L in O in ciascuno dei sei casi elencati al n. 3 e studiati ai n. successivi. Se la ω è generale L ha in O un punto triplo triplanare e i tre piani tangenti sono i tre piani coordinati; ciò se i numeri a, b, c sono tutti e tre $\neq 1$. Se invece è, per es., $c=1$, allora la L ha in O un punto quadruplo il cui cono quartico tangente si spezza, nel riferimento fissato come al n. 4, sottocaso corrispondente, nei due piani tangenti: $x=0$, $y=0$, e nel cono quadrico, in generale irriducibile: $c_{11}x^2+2c_{12}xy+c_{22}y^2+2c_{13}xz+$ $+2c_{23}yz+c_{33}z^2=0$.

Se la ω è parabolica, ma nessuno dei due numeri a e b è $=1$, la L ha in O un punto triplo biplanare, il piano tangente doppio essendo, nel riferimento fissato, il piano $z=0$ e il piano semplice $x=0$. Nel sottocaso $a=1$ la L possiede in O un punto quadruplo il cui cono tangente si spezza nel piano $z=0$ contato due volte e in un cono quadrico in generale irriducibile. Invece nel sottocaso $b=1$, la L possiede in O un punto quadruplo triplanare per il quale $z=0$ è il piano tangente doppio e gli altri piani tangenti (semplici) sono $x=0$ e $c_{12}x+c_{22}y+c_{23}z=0$.

Se la ω è doppiamente parabolica, ma è $a\neq 1$, la superficie L ha in O un punto triplo uniplanare il cui piano tangente è il piano $z=0$. Se invece $a=1$ la L ha in O un punto quadruplo biplanare, per il quale il piano $z=0$ è un piano tangente triplo e l'ulteriore piano tangente è il piano $c_{11}x+c_{12}y+c_{13}z=0$.

Se ω è un'omologia generale, la L possiede in O un punto quadruplo il cui cono quartico tangente si spezza nel piano $z=0$ e nel cono cubico:

$$2(b_{13}+b_{23})x^3-2(a_{13}+a_{23})y^3-b_{13}x^2z+a_{23}y^2z-(a_{13}-b_{23})xyz=0.$$

ciò se entrambi i numeri a, b sono $\neq 1$; se $b=1$ la L ha in O un punto quintuplo mentre se $a=1$ la L ha in O un punto sestuplo.

Nel caso dell'omologia speciale la L possiede in O un punto quadruplo biplanare con $z=0$ come piano tangente triplo e come ulteriore piano tangente: $b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z=0$; se inoltre ha $a=1$ L ha in O un punto quintuplo. Infine, se ω è l'identità, L ha in O un punto che ha molteplicità sei se $a\neq 1$ e superiore a sei se $a=1$.