Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Aquaro

Sul teorema di esistenza di Caratheodory per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 208–212.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_208_0>

Sul teorema di esistenza di Caratheodory per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Nota di GIOVANNI AQUARO (a Bari)

Sunto. - *Si attenua la condizione* 2) *del teor.* (C) *del n. 1 successivamente con le* 2') *del n. 2 e* 2'') *del n. 3.*

1. Denotato con V lo spazio dei vettori a p componenti, con $[a, b]$ un intervallo chiuso dell'asse reale e con $\mathcal{C}(a, b)$ l'insieme delle funzioni da $[a, b]$ a V continue in $[a, b]$, il noto teorema di C. CARATHEODORY di esistenza per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, in forma equivalente all'originaria, può enunciarsi come segue:

(C) *Sia f una funzione da $[a, b] \times V$ a V* [1] *verificante le condizioni:*

1) *Per ciascun $y \in V$ la $f(x, y)$ è una funzione di x misurabile in $[a, b]$ e per ciascun $x \in [a, b]$ la $f(x, y)$ è funzione di y continua in V* [2].

2) *Esiste una funzione reale $M(x)$ non negativa, sommabile in $[a, b]$ e tale che per ogni $(x, y) \in [a, b] \times V$* [3] *sia $\| f(x, y) \| \leq M(x)$* [4].

In tali ipotesi, comunque si consideri $\eta \in V$, esiste almeno una $y \in \mathcal{C}(a, b)$ tale che per ogni $x \in [a, b]$ risulti:

$$y(x) = \eta + \int_a^x f(t, y(t))dt. \tag{1}$$

Consegue immediatamente che y è funzione da $[a, b]$ a V assolutamente continua in $[a, b]$ tale che $y(a) = \eta$ ed $y' = f(x, y)$ quasi ovunque in $[a, b]$.

(1) Se E ed F sono insiemi generici diciamo che f è una funzione da E ad F se f è definita in E ed assume i suoi valori in F.

(2) Come di consueto, diciamo che una funzione da $[a, b]$ a V è, in $[a, b]$, continua assolutamente continua, misurabile, sommabile ecc. se altrettanto accade delle sue componenti.

(3) Con notazione molto diffusa se E ed F sono insiemi generici con $E \times F$ denotiamo il loro prodotto cartesiano cioè l'insieme delle coppie ordinate (x, y) con $y \in E$ ed $y \in F$.

(4) Se è $v \in V$ e $v_1, v_2, \dots, v_p$ sono le componenti di v poniamo $\| v \| = \left(\sum_{k=1}^{p} v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Il teorema di CARATHEODORY è suscettibile di una elementare generalizzazione se nel suo enunciato la proprietà 2) si sostituisce con la seguente:

2′) *Per ciascuna* $y \in \mathcal{C}(a, b)$, *la* $f(x, y(x))$ *è sommabile in* $[a, b]$ *ed, al variare di* y *in* $\mathcal{C}(a, b)$, *l'* $\int_a^x f(t, y(t))dt$ *descrive una famiglia di funzioni da* $[a, b]$ *a* V *equiassolutamente continue in* $[a, b]$ [5].

Notiamo che la 2) implica la 2′) quantunque, in generale, non si possa affermare che la 2′) implichi la 2).

Ciò osservato, dimostriamo l'asserto, usando un noto procedimento di L. TONELLI [6], mediante la costruzione di una successione (y_r) di elementi di $\mathcal{C}(a, b)$ attraverso la quale perverremo ad una soluzione della (1).

Fissiamo comunque il numero naturale r e, posto $\delta_r = \frac{b-a}{r}$ ed $x_k^{(r)} = a + k\delta_r$ per $k = 0, 1, \ldots, r$, assumiamo la funzione y_r da $[a, b]$ a V con la seguente definizione:

$$y_r(x) = \eta \qquad \text{per } x_0^{(r)} \leq x \leq x_1^{(r)}$$

$$y_r(x) = y_r(x_1^{(r)}) + \int_{x_0^{(r)}}^{x-\delta_r} f(t, y_r(t))dt \qquad \text{per } x_1^{(r)} < x \leq x_2^{(r)}$$

$$y_r(x) = y_r(x_{r-1}^{(r)}) + \int_{x_{r-2}^{(r)}}^{x-\delta_r} f(t, y_r(t))dt \qquad \text{per } x_{r-1}^{(r)} < x \leq x_r^{(r)}.$$

Consegue, con ovvie considerazioni, che è $y_r \in \mathcal{C}(a, b)$ e che per

[5] La $\mathfrak{F}$ è una famiglia di funzioni da $[a, b]$ a V equiassolutamente continue in $[a, b]$ se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un numero reale $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $[a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ sono intervalli contenuti in $[a, b]$, a due due disgiunti e se è $\sum_{k=1}^{q} (b_k - a_k) < \delta_\varepsilon$ per ogni $v \in \mathfrak{F}$, risulta $\sum_{k=1}^{q} \int_{ak}^{bk} \| v(x) \| dx > \varepsilon$; ciò accade, come è noto, se e solo se le componenti di ugual indice degli elementi di $\mathfrak{F}$ descrivono famiglie di funzioni reali equiassolutamente continue in $[a, b]$.

[6] Tale procedimento, del quale ci sembrano veramente notevoli i vantaggi di semplicità rispetto al procedimento originario di CARATHEODORY si trova in: L. TONELLI: *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra.* « Bull. of the Calcutta Math. Soc. », 20, (1928), pp. 31-48.

ogni x tale che $x_1^{(r)} < x \leq x_r^{(r)} = b$, si ha $y_r(x) = \eta + \int_a^{x-\delta_r} f(t, \ y_r(t))dt$ per ogni $r = 1, 2, \ldots$.

Per ciò e per la 2′), si riconosce che (y_r) è una successione di funzioni da $[a, b]$ a V equiassolutamente e quindi equicontinue in $[a, b]$ mentre, ovviamente, per ogni $r = 1, 2, \ldots$, si ha $\| y_r(a) \| = \| \eta \|$. In conseguenza, le funzioni della successione $(\| y_r \|)$ sono equilimitate in $[a, b]$ e quindi sussiste il teorema di ASCOLI–ARZELÀ in forma vettoriale onde esiste una successione crescente $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, di numeri naturali tale che la successione (y_{r_n}) sia uniformemente convergente in $[a, b]$ verso una certa $y \in \mathcal{C}(a, b)$.

Sia $a < x \leq b$: esiste un numero naturale n_x tale che per $n < n_x$ sia $x_1^{(r_n)} < x \leq b$: per $n > n_x$, dunque si ha $y_{r_n}(x) = = \eta + \int_a^{x+\delta_{r_n}} f(t, \ y_{r_n}(t))dt = \eta + \int_a^{x} f(t, \ y_{r_n}(t))dt + \int_x^{x-\delta_{r_n}} f(t, \ y_{r_n}(t))dt$ donde, essendo nullo il limite per $n \to \infty$ dell'ultimo integrale a causa di 2′), consegue la (1).

3. Seguendo un procedimento riportato da E. J. MC SCHANE: *Integration*, « Princeton Univ. Press. », (1947), p. 342 (68.3), possiamo, ulteriormente, sostituire la proprietà 2′) con la meno restrittiva:

2″) *Per ciascun* $y \in \mathcal{C}(a, b)$ *la funzione* $f(x, y(x))$ *è sommabile in* $[a, b]$. *Esiste inoltre, una funzione reale* φ *continua, positiva e non sommabile sull'intervallo* $[0, +\infty)$ (costituito dai numeri reali non negativi) *e tale che, al variare di* y *in* $\mathcal{C}(a, b)$, *l'* $\int_a^x \varphi(\| y(t) \|) \cdot \| f(t, \ y(t)) \| \, dt$ *descriva una famiglia di funzioni reali equiassolutamente continue in* $[a, b]$.

Posto $S_y(x) = \varphi(\| y(t) \|) \| f(x, \ y(x)) \|$, notiamo preliminarmente che, in conseguenza di 2″), al variare di y in $\mathcal{C}(a, b)$ l'$\int_a^b S_y(t)dt$ descrive un insieme numerico limitato superiormente. Invero la 2″) implica che scelto comunque il numero reale $\varepsilon > 0$, esiste il numero reale $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $[a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ è un qualunque sistema di intervalli contenuti in $[a, b]$, a due a due disgiunti e tali che sia $\sum_{k=1}^{q} (b_k - a_k) < \delta_\varepsilon$, per ogni $y \in \mathcal{C}(a, b)$ risulta

$\sum_{k=1}^{q} \int_{a_k}^{b_k} S_y(t)dt < \varepsilon$; decomposto $[a, b]$ in intervalli parziali $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$ a due a due privi di punti interni comuni tutti di ampiezza minore di δ_ε, risulta $\int_a^b S_y(t)dt = \sum_{k=1}^{\nu} \int_{x_k}^{x_{k+1}} S_y(t)dt < \nu\varepsilon$.

Si conclude così che l' $\int_a^b S_y(t)dt$ al variare di y in $\mathcal{C}(a, b)$ descrive un insieme numerico limitato superiormente e del quale denotiamo con M l'estremo superiore.

Ciò notato, poichè la $\varphi(t)$ non è sommabile in $[0, +\infty)$ essa non è sommabile in $[\,\|\eta\| + 1, +\infty)$ e quindi esiste il numero reale positivo $N > \|\eta\| + 1$ tale che $\int_{\|\eta\|+1}^{N} \varphi(t)dt > M \geq \int_a^b S_y(t)dt$ per ogni $y \in \mathcal{C}(a, b)$.

Consideriamo, dopo ciò, la funzione θ da V a V ottenuta ponendo $\theta(y) = y$ per $\|y\| \leq N$ e $\theta(y) = N \dfrac{y}{\|y\|}$ per $\|y\| > N$. È immediato riconoscere che θ è una funzione continua da V a V e che per ogni $y \in V$ risulta $\|\theta(y)\| \leq N$.

Poniamo $g(x, y) = f(x, \theta(y))$ per ogni $(x, y) \in [a, b] \times V$. La g verifica la condizione 1): dimostriamo che essa verifica anche la 2'). All'uopo, detto Φ il massimo della funzione continua positiva $\dfrac{1}{\varphi(t)}$ nell'intervallo chiuso $[O, N]$, per ogni $y \in \mathcal{C}(a, b)$ e per ogni $x \in [a, b]$ si ha:

$$\|g(x, y)\| = \|f(x, \theta(y(x)))\| =$$
$$= \frac{1}{\varphi(\|\theta(y(x))\|)} \varphi(\|\theta(y(x))\|)\, \|f(x, \theta(y(x)))\| \leq \Phi S^{(x)}_{\theta(y)}.$$

e quindi, per essere valida la 2'') la $g(x, y)$ verifica anche le condizioni richieste alla f in 2').

Consegue che, per quanto stabilito al n. 2, esiste $y \in \mathcal{C}(a, b)$ tale che $y(a) = \eta$ ed $y' = g(x, y)$ quasi ovunque in $[a, b]$ essendo y assolutamente continua in $[a, b]$.

Ora, è immediato stabilire che è $\|y(x)\| \leq N$ per ogni $x \in [a, b]$.

Supponiamo, al contrario, che sia $\|y(x)\| > N$ per qualche $x \in [a, b]$. Poichè è $\|y(a)\| = \|\eta\|$, $\|\eta\| + 1 < N$ ed $\|y\|$ è una funzione reale continua in $[a, b]$, esistono in $[a, b]$ dei valori, dei quali α denota il massimo, per i quali si ha $\| y \| = \| \eta \| + 1$ ed esistono in $[a, b]$ valori, dei quali β denota il minimo, per i quali si ha $\| y \| = N$. Ovviamente è $\alpha < \beta$ e per $x \in [\alpha, \beta]$, $\| \eta(x) \| + 1 \leq y(x) \leq N$.

Ciò osservato, per $x \in [\alpha, \beta]$ si ha $g(y, y(x)) = f(x, y(x))$ e, per ciò $\sum_{k=1}^{p} y^{(k)} \frac{dy^{(k)}}{dx} = \sum_{k=1}^{p} y^{(k)} f^{(k)}(x, y)$ (essendo $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(p)}$ ed $f^{(1)}, f^{(2)} \ldots, f^{(p)}$, le componenti rispettivamente di y e di f). Per la disuguaglianza di CAUCHY consegue $\left| \sum_{k=1}^{p} y^{(k)} \frac{dy^{(k)}}{dx} \right| \leq \| y \| \, \| f(x, y) \|$ e quindi $\frac{d}{dx} \| y \| \leq \| f(x, y) \|$ quasi ovunque in $[a, b]$. Richiamato il teorema di cambiamento di variabili negli integrali (secondo LEBESGUE) delle funzioni di una variabile reale, si deduce:

$$\int_{\|\eta\|+1}^{N} \varphi(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\| y(t) \|) \frac{d \| y(t) \|}{dt} dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} S_y(t)dt \leq \int_{a}^{b} S_y(t)dt < \int_{\|\eta\|+1}^{N} \varphi(t)dt$$

il che è assurdo.

Dunque è escluso che sia $\| y \| > N$ per qualche $x \in [a, b]$. Consegue per ogni $x \in [a, b]$, $g(x, y(x)) = f(x, \theta(y(x))) = f(x, y(x))$ e per ciò, dalla $y(x) = \eta + \int_{a}^{x} g(t, y(t))dt$ consegue la (1).