Bollettino
Unione Matematica Italiana

Lucio Lombardo-Radice

Sul rango dei piani grafici finiti a caratteristica 3.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 172–177.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_172_0>

Sul rango dei piani grafici finiti a caratteristica 3.

Nota di Lucio Lombardo-Radice (a Roma)

Sunto. - *Definiti come piani grafici « a caratteristica 3 » i piani grafici nei quali é universalmente valido il teorema configurazionale* « $3=0$ » *(v. oltre), si dimostra che il rango* t *di un piano finito a caratteristica* 3 *è un numero:* a) *divisibile per* 4 *se* t *è pari;* b) *tale che* $t+1$ *divisibile per* 27 *se* $t \equiv -1$ *mod* 3; c) *congruo* 0 *o* 1, *oppure* 3, *oppure*, 9, *o infine* 12 *modulo* 13. *Si propongono due problemi:* 1) *miglioramento di dette limitazioni;* 2) *ricerca di limitazioni analoghe nel caso della « caratteristica* p ».

1. *Il teorema* « $3=0$ ». Chiameremo « teorema $3=0$ » la proposizione configurazionale espressa dai seguenti allineamenti (l'allineamento « forzato » conclusivo è separato da una linea dagli allineamenti liberi che lo precedono):

$$\begin{array}{c} A_1A_2D_1 \\ A_3A_4D_1 \\ A_1A_3D_2 \\ A_2A_4D_2 \\ A_1A_4D_3 \\ A_2A_3D_3 \\ D_2D_1E_1 \\ A_2A_3E_1 \\ D_3D_1E_4 \\ A_2A_4E_4 \\ \hline A_1E_1E_4 \end{array}$$

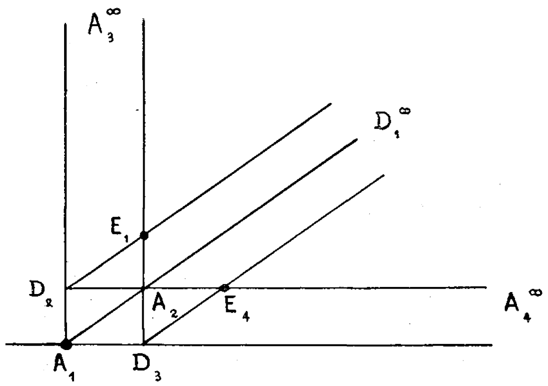

Figura 1

(vedi fig. 1). La denominazione « teorema $3=0$ » che noi proponiamo è giustificata dal fatto che la proposizione $3=1\,.\,1^{\circ}2=0$ [1]

[1] 1; $2=1.1^{\circ}1$; $3=1.1^{\circ}2$ ecc. sono naturalmente simboli di elementi dell'anello (ternario di Hall) delle coordinate rispetto a un dato riferimento, elementi che, nel caso più generale, non sono neppure numeri di un corpo astratto, e tanto meno i corrispondenti numeri dell'aritmetica ordinaria. L'anello di Hall è un corpo quando e soltanto quando il piano è desarguesiano.

è un equivalente algebrico locale [2] della proposizione configurazionale ora scritta.

Prendiamo i punti A_i nel seguente modo:

$A_1 = Z^\infty =$ punto all'infinito della retta unitaria; $A_2 = Y^\infty =$ punto improprio dell'asse y; $A_3 = (1, 1)$; $A_4\,(0, 1)$. Allora (vedi fig. 2), la proposizione configurazionale prima scritta predica l'allinea-

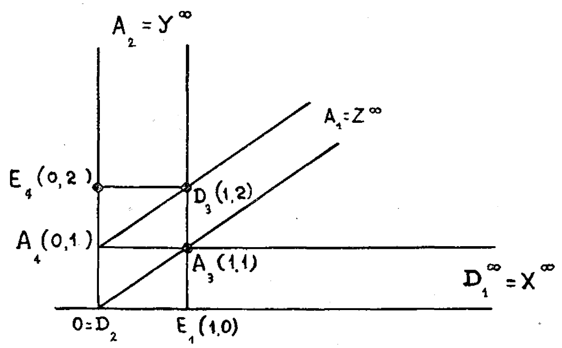

Figura 2

mento dei punti $(0,2)$, Z^∞, $(1,0)$; in altri termini, la retta $(0,2) \cup Z^\infty$ deve incontrare la retta $x = 1$ nel punto $(1,0)$. Giacchè la retta $(0,2) \cup Z^\infty$ ha l'equazione: $y = x \,.\, 1^\circ 2$, la ordinata della sua intersezione con la $x = 1$ è data da $1 \,.\, 1^\circ 2 = 3$; l'allineamento forzato conclusivo si traduce quindi nella uguaglianza:

$$3 = 0\,.$$

Questa osservazione ci consente di affermare senz'altro che la detta proposizione configurazionale vale universalmente in un piano lineare sopra un corpo a caratteristica 3 (una quaterna arbitraria di punti tre a tre non allineati può in esso piano essere scelta come quadrangolo $A_1 = Z_\infty$, $A_2 = Y_\infty$, $A_3(1, 1)$, $A_4(0,1)$). Diremo, per brevità, che un piano è a « caratteristica 3 » se in esso è universale il « teorema $3 = 0$ ». Il problema generale che allora si pone è quello della determinazione di tutti i possibili piani grafici a caratteristica 3. Non mi risulta che si conoscano piani grafici a caratteristica 3 diversi dai piani lineari sopra un corpo a caratteristica 3 (tutti desarguesiani). In questa nota, nel caso di un piano

[2] Nel senso di ARGUNOV. Ma il significato dell'espressione crediamo risulti chiaro dal contesto.

finito a caratteristica 3, si otterranno delle limitazioni aritmetiche per il suo rango che possono forse essere considerate come un « indizio » a favore della congettura che tutti i piani di questa classe siano desarguesiani, o quanto meno della congettura più debole che essi abbiano tutti per rango una potenza di 3.

2. *Distribuzione dei 4-archi in un piano a caratteristica* 3. Chiameremo 4-arco ([3]) una quaterna (non ordinata) di punti tre a tre non allineati in un piano grafico P. Se terremo conto dell'ordine, parleremo di « 4-arco ordinato ». Sia ora P un piano grafico finito di rango t, e composto perciò da $n = t^2 + t + 1$ punti e altrettante rette ($t + 1$ punti su ogni retta, $t + 1$ rette per ogni punto). Calcoliamo il numero dei 4-archi ordinati del piano P. Per ottenere un 4-arco ordinato in P, si dovrà innanzitutto fissare una coppia ordinata di punti, A e B; il numero di tali coppie è $2\binom{n}{2}$. Alla coppia A, B è da aggiungere poi un terzo punto C, fuori della retta $A \cup B$; fissata la coppia A, B, sono possibili, per C, $n - (t + 1) = t^2$ scelte. Il 4-arco ordinato sarà completato dalla scelta di un quarto punto, D, preso fuori dai lati del triangolo di vertici A, B, C. Sui lati di detto triangolo sono situati in tutto $(t + 1) + t + (t - 1) = 3t$ punti distinti; le scelte possibili per D, una volta fissata la terna ordinata A, B, C, sono perciò $n - 3t = t^2 - 2t + 1$. Il numero dei 4-archi ordinati di un piano P di rango t è pertanto:

$$Q_t = 2\binom{n}{2} (t^2 - 2t + 1)t^2;$$

quello dei 4-archi (non ordinati) è allora:

$$q_t = \frac{2\binom{n}{2} (t^2 - 2t + 1)t^2}{4.3.2} = \frac{(t^2 + t + 1)(t^2 + t)(t^2 - 2t + 1)t^2}{4.3.2} =$$
$$= \frac{(t^2 + t + 1)(t + 1)(t - 1)^2 t^3}{4.3.2}$$

(si vede senza difficoltà che la frazione è « apparente », cioè che q_t è sempre un intero).

Supponiamo ora che nel piano finito P di rango t il teorema « $3 = 0$ » sia universale. Ciò vuol dire che, a partire da un qualsiasi 4-arco A_1, A_2, A_3, A_4 sono realizzati in P tanto gli allinea-

([3]) Seguendo la terminologia introdotta da B. SEGRE in alcune sue recenti ricerche sui piani finiti desarguesiani in corso di pubblicazione.

menti liberi quanto l'allineamento forzato conclusivo che abbiamo prima elencati ([4]). Consideriamo, insieme ai 4 punti A del 4-arco e ai loro tre punti diagonali D, i 6 punti E (distinti dai precedenti) che si ottengono come intersezione delle rette congiungenti punti diagonali con i lati. Si vede allora senza difficoltà che, supponendo verificato il teorema « $3=0$ » per una qualsiasi permutazione degli indici dei punti A, i 13 punti in questione costituiscono un piano finito P_3 di rango 3, isomorfo al piano lineare sopra il campo di GALOIS $GF(3)$ ([5]). È allora chiaro che ogni altro 4-arco di P_3 ha i punti D' e i punti E' ad esso relativi ancora in P_3, e che perciò P_3 è generato da esso allo stesso modo nel quale era generato da $A_1, \dots, A_4$. In altri termini: se due subpiani di rango 3, P_3 e P_3', di P, hanno in comune un 4-arco, essi debbono addirittura coincidere.

Ma ciò vuol dire che i 4-archi di P si distribuiscono in classi disgiunte quando due 4-archi si considerino equivalenti se generano un medesimo P_3. Tali classi saranno tante, quanti sono i subpiani distinti di rango 3 in P; ogni classe conterrà q_3 4-archi, e q_3 può essere calcolato ponendo $t=3$ nella formula generale prima scritta che dà il numero dei 4-archi in un piano grafico di rango t.

In definitiva, in un piano finito P a caratteristica 3 e di rango t i 4-archi, che sono in numero di q_t, debbono distribuirsi in un certo numero di classi, costituite ciascuna da q_3 elementi (4-archi). Condizione necessaria affinchè ciò sia possibile è che q_t sia divisibile per q_3. Ora:

$$q_3 = 2 \,.\, 9 \,.\, 13\,;$$
$$q_t = \frac{(t^2+t+1)\,(t+1)\,(t-1)^2 t^3}{2^3 \,.\, 3}\,;$$

la condizione necessaria trovata si esprime perciò nel seguente modo:

([4]) Non solo deve essere verificato l'allineamento finale, ma si deve richiedere che negli allineamenti che lo precedono non si verifichino identificazioni di elementi (punti o rette) rappresentati da simboli diversi (nel nostro caso, ad es., sarà da escludere l'allineamento dei tre punti diagonali, che porterebbe all'identificazione di E_4 e D_2, di E_1 e D_3). Per il concetto di proposizione configurazionale, vedi il mio lavoro: *Su alcuni caratteri dei piani grafici*, in corso di pubblicazione nei « Rendiconti dell'Istituto matematico dell'Università di Padova ».

([5]) La cosa è dimostrata dettagliatamente nel n. 4 del lavoro citato nella nota precedente.

Il prodotto $(t^2 + t + 1)(t + 1)(t - 1)^2 t^3$ *deve essere divisibile per:* a) 2^4; b) 3^3; c) 13.

Lasciando al lettore la verifica dei facili calcoli, si vede allora che le condizioni *a*), *b*), *c*) equivalgono alle seguenti limitazioni aritmetiche per il rango t di un piano finito a caratteristica 3:

Il rango di un piano finito P *a caratteristica* 3 *é un numero intero che deve soddisfare alle seguenti limitazioni aritmetiche:*

a) *se* t *è pari, dev'essere divisibile addirittura per* 4; b) *se* $t \equiv -1$ *mod* 3, $t + 1$ *dev'essere divisibile per* 3^3*;* c) $t \equiv 0$, *oppure* $\equiv 1$, *oppure* $\equiv 3$, *oppure* $t \equiv 9$, *o infine* $t \equiv 12$ mod 13.

3. *Due problemi aperti.*

Le limitazioni *a*), *b*) ora assegnate per il rango di un piano finito a caratteristica 3, essendo simultanee, ci sembrano abbastanza significative, e forse, come ora meglio spiegheremo, indicative per una ulteriore precisazione. Tra i ranghi ammissibili figurano naturalmente le potenze di 3, che sono numeri dispari, congrui zero mod 3, e congrui 1, o 3, o 9 mod 13 (le potenze di 3 dovevano figurare tra i ranghi ammissibili, giacchè esistono piani a caratteristica 3 aventi per rango una data potenza, 3^m, del 3, tale essendo perlomeno il piano lineare sul campo di GALOIS con 3^m elementi). In base alle sole limitazioni *a*), *b*), *c*) risultano però ammissibili anche dei ranghi che non sono potenza di 3; è allora naturale chiedersi se non si possa ottenere una limitazione più forte, se, per esempio, non si possa per altra via arrivare a concludere che il rango di un piano a caratteristica 3 è necessariamente una potenza di 3.

Si potrebbe cercare di ottenere la dimostrazione seguendo una via analoga a quella che porta a concludere che un piano grafico finito a caratteristica 2 ha rango uguale a una potenza di 2 (piano a caratteristica 2 = piano a configurazione di FANO universale; un equivalente locale della configurazione di FANO, cioè dell'allineamento dei punti diagonali di un 4-arco, è la uguaglianza: $2 = 0$). Quest'ultimo fatto è un corollario del teorema (RASCHEVSKI), secondo il quale le coordinate di un piano a caratteristica 2 formano un gruppo abeliano, rispetto all'addizione naturale, nel quale ogni elemento ha periodo 2. È da osservare che in un piano a caratteristica 2 ogni 4-arco genera un piano P_2, isomorfo al piano lineare su $GF(2)$, e che di conseguenza si possono trovare delle limitazioni per il rango anche seguendo la via battuta in questa nota per la caratteristica 3; le limitazioni che in tal modo si ottengono sono però assai più deboli del risultato che si ottiene per via geometrico-gruppale; e ciò potrebbe essere considerato un altro «indizio» a favore della congettura esposta.

In secondo luogo, viene fatto naturale di porsi un altro problema: sarà, o no, possibile arrivare a qualche limitazione per il rango di un piano «a caratteristica p», estendendo al «teorema $p = 0$» (6) (p primo qualsivoglia) il metodo seguito in questa nota nella ipotesi della universalità del teorema «$3 = 0$» (e valido anche nella ipotesi della universalità del teorema «$2 = 0$», se pure meno significativo del metodo geometrico-gruppale)? Occorrerà vedere se anche nel caso della universalità del «teorema $p = 0$» si può affermare che ogni 4-arco genera un piano isomorfo al piano lineare sul campo di Galois $GF(p)$.

Chi scrive, impegnato per il momento in altre ricerche, propone i due problemi indicati all'attenzione di altri ricercatori, soprattutto degli studiosi più giovani. È, come spesso accade, arduo prevedere «l'ordine di difficoltà» delle questioni proposte. Probabilmente assai difficile è il problema generale, e cioè quello della determinazione di tutti i possibili piani grafici nei quali è universale il «teorema $p = 0$», lontano ancora dalla soluzione anche nel caso $p = 2$, pur largamente studiato da molti autori; è probabilmente non troppo difficile migliorare le limitazioni aritmetiche esposte in questa nota per il rango di un piano grafico finito a caratteristica 3, e forse anche trovare qualche limitazione analoga nel caso generale della caratteristica p.