Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Aymerich

Guide d'onda anisotrope con "fili" non perfettamente conduttori.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 165–171.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_165_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Guide d'onda anisotrope con «fili» non perfettamente conduttori

Nota di GIUSEPPE AYMERICH (a Cagliari)

Sunto. - *Si esprimono le costanti di propagazione di una guida anisotropa con fili leggermente assorbenti in funzione dei modi della guida ideale. Si considera anche il caso di un autovalore multiplo e si mostra come la molteplicità possa sparire o ridursi nella guida imperfetta.*

1. La teoria delle guide d'onda elettromagnetiche ordinarie (isotrope) si svolge, secondo metodi ben noti, in modo abbastanza semplice se si suppongono le pareti perfettamente conduttrici. Il problema diventa più complesso quando si voglia tener conto del fatto che la parete ha conduttività finita, il che è importante dal punto di vista applicativo per il calcolo delle perdite. Se tuttavia la conduttività è molto grande si può ammettere, in buon accordo con l'esperienza, che sulla parete il campo elettrico tangenziale $\boldsymbol{E}_\tau$ risulta associato a quello magnetico della relazione.

$$\boldsymbol{E}_\tau = \nu \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{n} \quad (1)$$ [1]

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale e ν è un coefficiente inversamente proporzionale alla radice quadrata della conduttività della parete [1]. In tale ipotesi, supposto ν molto piccolo, lo studio del campo elettromagnetico propagantesi nella guida può condursi col metodo delle perturbazioni [2].

In questo lavoro ci siamo proposti di studiare la propagazione delle onde elettromagnetiche in una guida anisotropa nell'ipotesi che i «fili del guscio siano leggermente assorbenti. Poichè la corrente elettrica si propaga soltanto nella direzione dei fili, è naturale ammettere che l'essere la conduttività finita non debba influire direttamente sulla componente del campo elettrico normale al filo, ma soltanto su quella, $E_{//}$, parallela al filo, la quale, a norma della (1), è lecito supporre sia legata, sulla faccia interna e su quella esterna del guscio, alla componente, $H_{\perp}$, del campo magnetico secondo la direzione tangenziale alla superficie e normale al filo dalla relazione [3].

$$E_{//}^{i,e} = \nu H_{\perp}^{i,e}.$$

Servendoci del teorema di reciprocità abbiamo mostrato come le costanti di propagazione della guida non perfettamente conduttrice ed in particolare il coefficiente di assorbimento possono esprimersi in funzione dei «modi» della guida ideale. Abbiamo esa-

(1) Toraldo, *Onde elettromagnetiche*, Bologna, 1953, Cap. IX, § 8, oppure Schelkunoff, *Electromagnetic Waves*, New York, 1948, cap VIII.

(2) Papadopoulos, *Propagation of electromagnetic Waves in cylindrical wave-guides with imperfectly conducting walls*, Q. Journ. of Mech. and appl. Math., Oxford, VII sept. 1951; v. anche

De Socio, *Sull'instabilità delle onde elettromagnetiche in una guida a pareti non perfettamente conduttrici*, Acc. delle Sc. dell'Ist. di Bologna, 1953.

(3) Ovviamente, i versi rispettivamente paralleli al filo, normali al filo e sul guscio, e normali a quest'ultimo devono formare un triedro destro.

minato anche il caso di un autovalore multiplo (caso degenere) mostrando come tale molteplicità possa sparire o ridursi nella guida imperfetta.

Il procedimento da noi seguito può naturalmente applicarsi anche alle guide ordinarie e conduce ai risultati noti, per altra via, in modo assai più rapido.

2. – Supponiamo per semplicità che il guscio sia posto internamente ad una guida isotropa coassiale, ma i risultati si estendono facilmente al caso di un guscio *aperto*.

Assunto l'asse z coincidente con quello del guscio, supponiamo che l'angolo ψ che la tangente al filo forma col piano xy sia minore di $\frac{\pi}{2}$, potendosi anche avere $\psi = 0$.

Consideriamo un generico «modo» della guida, ossia un campo elettromagnetico armonico del tipo

$$\boldsymbol{E}(x, y, z)e^{j\omega t} = \bar{\mathcal{E}}(x, y)e^{-j\beta z}e^{j\omega t}, \quad \boldsymbol{H}(x, y, z)e^{j\omega t} = \bar{\mathcal{H}}(x, y)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} \tag{2}$$

essendo β (numero d'onda) una costante, reale o complessa. Le componenti trasversali $\bar{\mathcal{E}}_T$ $\bar{\mathcal{H}}_T$ di $\bar{\mathcal{E}}$ e di $\bar{\mathcal{H}}$ si possono esprimere mediante le loro componenti longitudinali $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_z$: precisamente, ammesso che sia

$$\alpha^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \beta^2 \neq 0$$

si ha

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_T &= -\frac{j}{\alpha^2}(\beta \operatorname{grad} \mathcal{E}_z + \omega\mu \operatorname{grad} \mathcal{H}_z \wedge \boldsymbol{k}) \\ \bar{\mathcal{H}}_T &= -\frac{j}{\alpha^2}(\beta \operatorname{grad} \mathcal{H}_z - \omega\varepsilon \operatorname{grad} \mathcal{E}_z \wedge \boldsymbol{k}). \end{aligned} \tag{3}$$

Nei punti interni alla guida, esclusa la superficie del guscio, le funzioni $\mathcal{E}_z$ e $\mathcal{H}_z$ soddisfano l'equazione

$$\Delta f + \alpha^2 f = 0. \tag{4}$$

Esaminiamo le condizioni al contorno. Poichè la imperfetta conducibilità della parete esterna isotropa (se esiste) non implica alcuna variante rispetto al caso delle guide ordinarie, supponiamo per semplicità che tal parete sia perfettamente conduttrice. Ne segue per motivi ben noti che sulla parete esterna risulta nulla la componente tangenziale del campo elettrico. Se poi la guida esterna mancasse (guscio aperto) si dovrebbero imporre delle opportune condizioni di annullamento all'infinito.

Riguardo al guscio se si suppongono i fili perfettamente conduttori si ottengono delle condizioni che qui ricordiamo per comodità. Considerato un punto P della superficie del guscio, diciamo $\boldsymbol{a}_{//}$ il versore della direzione del filo in P ed $\boldsymbol{a}_{\perp}$ il versore normale ad $\boldsymbol{a}_{//}$ e parallelo al piano tangente in P alla superficie stessa; indichiamo poi con $u_{//}$ ed $u_{\perp}$ le componenti di un vettore $\boldsymbol{u}$ secondo $\boldsymbol{a}_{//}$ ed $\boldsymbol{a}_{\perp}$. Distinguendo con gli indici «i» ed «e» le determinazioni di $\boldsymbol{E}$ e di $\boldsymbol{H}$ sulla faccia interna e su quella esterna del guscio, le suddette condizioni sono:

$$E^i_{\perp} = E^e_{\perp}, \qquad H^i_{//} = H^e_{//} \tag{5}$$

$$E^i_{//} = E^e_{//} = 0. \tag{6}$$

Come abbiamo accennato, il fatto che la conduttività dei fili sia finita (ma molto grande) influisce in modo trascurabile sul campo magnetico e su $E_{\perp}$, ma implica che il campo elettrico, sia interno che esterno, abbia una componente non nulla nella direzione del filo, e adattando al nostro caso l'ipotesi comunemente accettata per le guide ordinarie si può supporre

$$E^i_{//} = \nu H^i_{\perp}, \qquad E^e_{//} = \nu H^e_{\perp} \tag{6'}$$

dove, indicata con γ la conduttività del filo, si ha

$$\nu = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\gamma}}(1 + j). \tag{7}$$

Pertanto nell'ipotesi che il materiale dei fili sia leggermente assorbente la condizione (5) resta immutata ed in luogo della (6) si ha la (6').

Se si fanno intervenire le (3), le equazioni (5) e (6) o (6') forniscono quattro relazioni omogenee nelle funzioni incognite $\mathcal{E}_z$ e $\mathcal{H}_z$ e le loro derivate tangenziali e normali, le quali (3) insieme all'equazione indefinita (4) (che deve essere soddisfatta da $\mathcal{E}_z$ e da $\mathcal{H}_z$) definiscono il problema al contorno fondamentale della guida anisotropa: un valore del parametro β cui corrisponde una soluzione $(\mathcal{E}_z, \mathcal{H}_z)$ non identicamente nulla è un autovalore del problema ed il corrispondente campo elettromagnetico un «modo» della guida.

Dato il piccolo valore del coefficiente ν si può ammettere che

(3) AYMERICH, *Sulle onde elettromagnetiche guidate da una superficie cilindrica perfettamente conduttrice anisotropa*; Ren. Sem. Mat. Padova, 1953, XXII, p. 157.

ad ogni autovalore della guida perfetta corrisponda un autovalore di quella imperfetta differente dal primo per quantità dell'ordine di ν. Supposti noti un autovalore β ed il modo od i modi ad esso associati della guida perfetta, vogliamo determinare adesso l'autovalore corrispondente della guida non perfettamente conduttrice.

Esaminiamo saparatamente i due casi che l'autovalore sia semplice o multiplo.

A). Supposto che all'autovalore β sia associato un solo modo $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ della guida perfetta, diciamo β' ed $(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}')$ l'autovalore ed il modo corrispondenti della guida imperfetta. Per quanto precede poniamo

$$\beta' = \beta + \nu\delta \tag{8}$$

e

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + O(\nu), \qquad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + O(\nu) \tag{9}$$

e proponiamoci di determinare il parametro δ.

Consideriamo una generica fetta della guida di lunghezza unitaria, ad es. quella limitata dai piani $z = 0$ e $z = 1$, ed indichiamo con σ e con σ_1 le basi e con Σ la parte della superficie del guscio tra esse compresa. Poichè nell'interno della fetta, esclusa la superficie Σ, tanto $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ quanto $(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}')$ soddisfano le equazioni di MAXWELL, vale il teorema di reciprocità

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}^* \wedge \boldsymbol{H}') + \operatorname{div}(\boldsymbol{E}' \wedge \boldsymbol{H}^*) = 0$$

onde applicando il teorema della divergenza nella fetta si ha

$$\begin{aligned} -\int_\sigma (\boldsymbol{E}^* \wedge \boldsymbol{H}' + \boldsymbol{E}' \wedge \boldsymbol{H}^*) \times \boldsymbol{k}\, d\sigma + \int_{\sigma_1} (\boldsymbol{E}^* \wedge \boldsymbol{H}' + \boldsymbol{E}' \wedge \boldsymbol{H}^*) \times \boldsymbol{k}\, d\sigma - \\ - \int_\Sigma [E_\perp^* H_{//}' - E_{//}^* H_\perp' + E_\perp' H_{//}^* - E_{//}' H_\perp^*]\, d\Sigma = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

dove si è indicata col simbolo [ ] la discontinuità attraverso Σ ossia

$$[f] = f^e - f^i,$$

ed inoltre si è tenuto conto del fatto che sulla parete esterna della guida la componente tangenziale di $\boldsymbol{E}$ è nulla.

Ricordando che $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ ed $(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}')$ sono del tipo (2) in luogo dei primi due integrali si può scrivere

$$(e^{-j\delta\nu} - 1) - \int_\sigma (\boldsymbol{E}^* \wedge \boldsymbol{H}' + \boldsymbol{E}' \wedge \boldsymbol{H}^*) \boldsymbol{k}\, d\sigma$$

ovvero, tenendo presente le (9) ed a meno di termini dell'ordine di ν^2,

$$-2j\delta\nu \int_\sigma \mathrm{Re}\, S_z d\sigma$$

dove si è introdotto il vettore di POYNTING complesso

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}^*.$$

Per quanto riguarda l'integrale esteso a Σ, ricordando che per $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ valgono le (5) e le (6) e per $(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}')$ le (5) e le (6') si vede facilmente che, con un errore dell'ordine di ν^2, esso si riduce al termine

$$\nu \int_\Sigma [H_\perp^* H_\perp]\, d\Sigma .$$

Riprendendo la (10) si ottiene quindi

$$2j\delta \int_\sigma \mathrm{Re}\, S_z d\sigma = \int_\Sigma [H_\perp^* H_\perp]\, d\Sigma$$

ossia

$$\delta = -\frac{j}{2} \frac{\int_\Sigma [H_\perp^* H_\perp]\, d\Sigma}{\int_\sigma \mathrm{Re}\, S_z d\sigma} .$$

In particolare il coefficiente di assorbimento della guida è dato da

$$\mathrm{Im}\, \beta' = j \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\gamma}}\, \delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \frac{\int_\Sigma [H_\perp^* H_\perp]\, d\Sigma}{\int_\sigma \mathrm{Re}\, S_z d\sigma}$$

B). Se l'autovalore β è m-plo ossia sono associati ad esso m modi indipendenti $(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1), (\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2), \ldots, (\boldsymbol{E}_m, \boldsymbol{H}_m)$ della guida perfetta, ferma restando la (8), in luogo della (9) si può porre

$$\boldsymbol{E}' = \sum_1^m{}_s\, a_s \boldsymbol{E}_s + O(\nu), \quad \boldsymbol{H}' = \sum_1^m{}_s\, a_s \boldsymbol{H}_s + O(\nu).$$

Considerato uno generico dei modi associati a β, diciamo $(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{H}_r)$, e procedendo come nel caso precedente, si ottiene adesso, entro il solito ordine di approssimazione,

$$\sum_{1}^{m}{}_s\, a_s \left\{ \int_\Sigma [H_{r\perp}^* H_{s\perp}]\, d\Sigma - j\delta \int_\sigma (\boldsymbol{E}_r^* \wedge \boldsymbol{H}_s + \boldsymbol{E}_s \wedge \boldsymbol{H}_r^*)\, d\sigma \right\} = 0 \qquad r=1, 2 \ldots m.$$

Queste costituiscono m equazioni lineari omogenee negli m coefficienti a_s, dove δ interviene come parametro; detto $D(\delta)$ il determinante dei coefficienti, esisterà quindi una m-pla di valori non tutti nulli delle a_s se δ è una radice dell'equazione, di grado m

$$D(\delta) = 0. \tag{11}$$

Se le radici della (11) sono distinte a ciascuna di esse corrisponderà, a parte un fattore comune inessenziale, una determinata m-pla delle a_s, cosicchè il potere assorbente dei fili in questo caso risolve il caso degenere della guida perfetta, facendo corrispondere all'autovalore m-plo β m autovalori distinti, differenti tra loro per quantità dell'ordine di ν.

Se la (11) ha una radice n-pla $(n \leq m)$ il caso degenere non viene completamente eliminato dall'assorbimento del materiale ma soltanto ridotto di ordine, o addirittura lasciato inalterato se $n = m$.

Quest'ultimo caso si verifica nel guscio ad anelli $(\psi = 0)$ di sezione circolare. Per questo sistema infatti le autofunzioni si esprimono, in coordinate polari r, θ, nella forma

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{E}_z(r, \theta) \\ \mathcal{H}_z(r, \theta) \end{matrix}\right\} = C_n(\alpha r) \exp(\pm jn\theta)$$

essendo n un numero intero e C_n, una funzione cilindrica di ordine n, e si dimostra ([4]), come del resto è facile intuire data la simmetria del sistema, che fissato $|n|$, ad esso corrisponde, se ω è compreso entro opportuni intervalli, un valore di β, che è indipendente perciò dalla scelta del segno nel fattore esponenziale. La duplicità degli autovalori non viene però eliminata dall'assorbimento dei fili, a meno che questo non determini una asimmetria del guscio, come si può ottenere, supponendo ν variabile con θ.

([4]) Sensiper, *Electromagnetic Wave propagation on helical conductors*, M. I. T., Cambridge, (U. S. A.) 1951.