Heinrich Guggenheimer

# Sopra una successione esatta e sulle modificazioni delle varietà kähleriane di dimensione quattro.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **10** (1955), n.2, p. 153–160.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_153_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

## Sopra una successione esatta e sulle modificazioni delle varietà kähleriane di dimensione quattro.

Nota di HEINRICH GUGGENHEIMER (a Gerusalemme)

**Sunto.** - *Si studiano certe corrispondenze fra varietà kähleriane, dette* modificazioni, *e il loro modo di operare sui gruppi di co-omologia.*

**1.** - Sia $V_k$ una varietà [1] analitica complessa, a $k$ dimensioni complesse, dotata di una metrica kähleriana. Una forma differenziale esterna si dice di tipo $(r, s)$, se è omogenea di grado $r$ nelle $dz_i$ e di grado $s$ nelle $d\bar{z}_i$ in un sistema locale di coordinate ammis-

([1]) La parola «varietà» va sempre intesa in senso topologico, vale a dire *senza singolarità*.

sibili. Il tipo è un invariante globale della forma quando esso è definito [1]. Indicheremo con:

- $d$ la derivata esterna di una forma,
- $d'$ la derivata esterna parziale, operante soltanto sulle $dz$, la quale trasforma una forma di tipo $(r, s)$ in una di tipo $(r+1, s)$,
- $d''$ la derivata esterna parziale, operante soltanto sulle $dz$ la quale trasforma una forma di tipo $(r, s)$ in una di tipo $(r, s+1)$; $d = d' + d''$,
- $*$ l'aggiunta di Hodge-de Ram,

e porremo, come al solito

$$\begin{gathered}\delta = -*d*, \quad \delta' = -*d'*, \quad \delta'' = -*d''*, \\ \Delta = d\delta + \delta d, \quad \Delta' = \Delta'' = \Delta.\end{gathered} \tag{1}$$

In virtù dei teoremi di Hodge [1], ogni forma $\varphi$ definita su $V$ avente un sostegno compatto è dotata delle scomposizioni seguenti ciascuna delle quali è unica

$$\begin{aligned}\varphi &= \mu + d\,\sigma + \delta\,\rho \\ &= \mu + d'\sigma' + \delta'\rho' \\ &= \mu + d''\sigma'' + \delta''\rho'',\end{aligned} \tag{2}$$

ove $\Delta\mu = 0$.

Il prodotto scalare di due forme $\varphi^p$, $\psi^p$ è definito dalla

$$(\varphi, \psi) = \int_V \varphi^p \wedge * \psi^p \tag{3}$$

e si ha, per le forme a sostegni compatti [1], [3],

$$(d\varphi, \psi) = (\varphi, \delta\psi); \quad (d'\varphi, \psi) = (\varphi, \delta'\psi); \quad (d''\varphi, \psi) = (\varphi, \delta''\psi). \tag{4}$$

Rileviamo anche le formule [1], [3],

$$\begin{aligned} d''d' + d'd'' &= 0 \quad & d'\delta'' + \delta''d' &= 0 \\ \delta''\delta' + \delta'\delta'' &= 0 \quad & d''\delta' + \delta'd'' &= 0.\end{aligned} \tag{5}$$

W. V. D. Hodge ha dimostrato [1] che, per le forme a sostegni compatti,

$$\begin{aligned} d'\varphi = 0 &\quad \text{implica} \quad \varphi = \mu + d'\sigma' \\ d''\varphi = 0 &\quad \text{implica} \quad \varphi = \mu + d''\sigma'' \\ d'\varphi = d''\varphi = 0 &\quad \text{implica} \quad \varphi = \mu + d'd''\sigma.\end{aligned}$$

Ne risulta che i gruppi, definiti sulle forme a sostegni compatti

$$
\begin{aligned}
H'^p &= \{ \varphi^p / d' \varphi = 0 \} / \{ \varphi^p / \varphi^r = d' \psi^{r-1} \} \\
H''^p &= \{ \varphi^p / d'' \varphi = 0 \} / \{ \varphi^p / \varphi^r = d'' \psi^{r-1} \} \\
\overline{H}^p &= \{ \varphi^p / d' \varphi = d'' \varphi = 0 \} / \{ \varphi^p / \varphi^r = d' d'' \psi^{r-2} \}
\end{aligned} \tag{6}
$$

sono tutti isomorfi al gruppo di co-omologia a sostegni compatti definito su $V$. In base alle proprietà degli operatori $d'$ e $d''$, i gruppi si decompongono come segue

$$
\begin{aligned}
H'^p &= \sum_{r+s=p} H'^p_{(r,s)} \\
H''^p &= \sum_{r+s=p} H''^p_{(r,s)} \\
\overline{H}^p &= \sum_{r+s=p} \overline{H}^p_{(r,s)}
\end{aligned} \tag{7}
$$

dove i gruppi $H'^p_{(r,s)}$, ecc. sono definiti sulle forme di tipo $(r, s)$ soltanto.

**2.** In aggiunta alle formule di Hodge dimostreremo che

$$
\begin{aligned}
d' \varphi = \delta'' \varphi = 0 \quad &\text{implica} \quad \varphi = \mu + d' \delta'' \sigma \\
d'' \varphi = \delta' \varphi = 0 \quad &\text{implica} \quad \varphi = \mu + d'' \delta' \sigma .
\end{aligned}
$$

Per ragioni di simmetria, la dimostrazione occorre soltanto per uno dei due enunciati. Nel primo caso si ha $d'\varphi = 0$, quindi

$\varphi = \mu + d'\sigma = \mu + d'd''\rho + d'\delta''\tau$. $\delta''\varphi = 0$ implica allora $\delta'' d'' d' \rho = 0$, ma

$$(d''d'\rho,\ d''d'\rho) = (d'\rho,\ \delta''d''d'\rho) = 0$$

implica $d''d'\rho = 0$ essendo il prodotto scalare definito positivo [1].

Si hanno dunque altri due gruppi di co-omologia ordinaria a coefficienti reali:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^p &= \{ \varphi^p / d' \varphi = \delta'' \varphi = 0 \} / \{ \varphi^p / \varphi = d' \delta'' \psi \} \\
\overline{\mathcal{H}}^p &= \{ \varphi^p / d'' \varphi = \delta' \varphi = 0 \} / \{ \varphi^p / \varphi = d'' \delta' \psi \} .
\end{aligned} \tag{8}
$$

**3.** Sia ora $W_m$ una sottovarietà käleriana di $V_k$. Coi procedimenti usuali della topologia algebrica, ciascuno dei gruppi definiti finora dà luogo ad una successione esatta di co-omologia [3]:

$$
\begin{array}{lllll}
\to H'^{p}_{(r,s)}(W) \xrightarrow{d'} & H'^{p+1}_{(r+1,s)}(V,W) & \to H'^{p+1}_{(r+1,s)}(V) & \to H'^{p+1}_{(r+1,s)}(W) & \to \\
\to H''^{p}_{(r,s)}(W) \to & H''^{p+1}_{(r,s+1)}(V,W) & \to H''^{p+1}_{(r,s+1)}(V) & \to H''^{p+1}_{(r,s+1)}(W) & \to \\
\to \bar{H}^{p}_{(r,s)}(W) \to & \bar{H}^{p+2}_{(r+1,s+1)}(V,W) & \to \bar{H}^{p+2}_{(r+1,s+1)}(V) & \to \bar{H}^{p+2}_{(r+1,s+1)}(W) & \to \\
\to \mathcal{H}^{p}_{(r,s)}(W) \to & \mathcal{H}^{p}_{(r+1,s-1)}(V,W) & \to \mathcal{H}^{p}_{(r+1,s-1)}(V) & \to \mathcal{H}^{p}_{(r+1,s-1)}(W) & \to \\
\to \bar{\mathcal{H}}^{p}_{(r,s)}(W) \to & \bar{\mathcal{H}}^{p}_{(r-1,s+1)}(V,W) & \to \bar{\mathcal{H}}^{p}_{(r-1,s+1)}(V) & \to \bar{\mathcal{H}}^{p}_{(r-1,s+1)}(W) & \to
\end{array}
\tag{9}
$$

Qui si hanno gli isomorfismi

$$
\begin{array}{l}
H'_{(r,s)}(V) \cong H''_{(r,s)}(V) \cong \bar{H}_{(r,s)}(V) \cong \mathcal{H}_{(r,s)}(V) \cong \bar{\mathcal{H}}_{(r,s)}(V) \\
H'_{(r,s)}(W) \cong H''_{(r,s)}(W) \cong \bar{H}_{(r,s)}(W) \cong \mathcal{H}_{(r,s)}(W) \cong \bar{\mathcal{H}}_{(r,s)}(W)
\end{array}
\tag{10}
$$

essendo il rango $p_{r,s}(X)$ del gruppo $H_{(r,s)}(X)$ uguale al numero delle forme armoniche linearmente indipendenti contenute nel gruppo ($X = V$ o $W$). Invece, nulla è noto sui gruppi $H_{(r,s)}(V, W)$ ecc. che figurano nelle successioni, poichè risulta dalla costruzione delle successioni che si debbono ammettere necessariamente delle forme prive di sostegno compatto in $V - W$, ossia delle forme il cui sostegno è l'intero spazio $V - W$.

**4.** Una *modificazione kähleriana* di $V$ in $W$ è una trasformazione di $V$ in una varietà kähleriana $V'$ della stessa dimensione, che sia biunivoca e olomorfa in $V - W$ e tale che un intorno di $W$ in $V$ sia trasformato nell'intorno di una sottovarietà $W'$ di $V'$, essendo $W'$ uguale a $V' -$ (immagine di $V - W$).

In questo caso si ha

$$
\begin{array}{l}
\bar{\mathcal{H}}_{(r,s)}(V, W) \cong \bar{\mathcal{H}}_{(r,s)}(V', W') \\
\mathcal{H}_{(r,s)}(V, W) \cong \mathcal{H}_{(r,s)}(V', W') \\
\bar{H}_{(r,s)}(V, W) \cong \bar{H}_{(r,s)}(V', W') \\
H''_{(r,s)}(V, W) \cong H''_{(r,s)}(V', W') \\
H'_{(r,s)}(V, W) \cong H'_{(r,s)}(V' W').
\end{array}
\tag{11}
$$

Tutti i gruppi che figurano nelle nostre successioni esatte sono degli spazi vettoriali sul corpo dei numeri complessi. Ma, se una successione di spazi vettoriali $A_i$ è esatta,

$$0 \to A_0 \to \dots \to A_i \to A_{i+1} \to \dots \to A_4 \to 0.$$

se ne deduce per i ranghi

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{rang}(A_i) = 0.$$

Paragonando le equazioni che si deducono dalle successioni esatte in $V$, $W$ ed in $V'$, $W'$ rispettivamente, si ottiene:

da $H'$

$$\sum_{s=0}^{k-r} (-1)^s (p_{r,s}(V) - p_{r,s}(W)) = \sum_{s=0}^{k-r} (-1)^s (p_{r,s}(V') - p_{r,s}(W')) \quad r = 0, 1, \dots, k$$

da $H''$

$$\sum_{r=0}^{k-s} (-1)^r (p_{r,s}(V) - p_{r,s}(W)) = \sum_{r=0}^{k-s} (-1)^r (p_{r,s}(V') - p_{r,s}(W')) \quad s = 0, 1, \dots, k$$

da $\overline{H}$

$$\sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i (p_{r+1,i}(V) - p_{r+1,i}(W)) = \\ = \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i (p_{r+i,i}(V') - p_{r+i,i}(W')) \quad r = 0, 1, \dots, k$$

$$(12) \quad \sum_{i=0}^{k-s} (-1)^i (p_{i,s+i}(V) - p_{i,s+i}(W)) = \\ = \sum_{i=0}^{k-s} (-1)^i (p_{i,s+i}(V')) - p_{i,s+i}(W')) \quad s = 0, 1, \dots, k$$

da $\mathcal{H}$

$$\sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i (p_{r+i,k-i}(V) - p_{r+i,k-i}(W)) = \\ = \sum_{i=0}^{r-r} (-1)^i (p_{r+i,k-i}(V') - p_{r+i,k-i}(W')) \quad r = 0, 1, \dots, k$$

da $\overline{\mathcal{H}}$

$$\sum_{i=0}^{k-s} (-1)^i (p_{k-i,s+i}(V) - p_{k-i,s+i}(W)) = \\ = \sum_{i=0}^{k-s} (-1)^i (p_{k-i,s+i}(V') - p_{k-i,s+i}(W')) \quad s = 0, 1, \dots, k$$

**5.** Sia ora $k = 4$, e poniamo $c_{ik} = p_{i,k}(V) - p_{i,k}(W) - p_{i,k}(V') + p_{i,k}(W')$. Le equazioni scritte sopra danno la tabella:

$$
\begin{aligned}
&c_{00} - c_{01} + c_{02} - c_{03} + c_{04} = 0\\
&c_{10} - c_{11} + c_{12} - c_{13} + c_{14} = 0\\
&c_{20} - c_{21} + c_{22} - c_{23} + c_{24} = 0\\
&c_{30} - c_{31} + c_{32} - c_{33} + c_{34} = 0\\
&c_{40} - c_{41} + c_{42} - c_{43} + c_{44} = 0\\
&c_{00} - c_{10} + c_{20} - c_{30} + c_{40} = 0\\
&c_{01} - c_{11} + c_{21} - c_{31} + c_{41} = 0\\
&c_{02} - c_{12} + c_{22} - c_{32} + c_{42} = 0\\
&c_{03} - c_{13} + c_{23} - c_{33} + c_{43} = 0\\
&c_{04} - c_{14} + c_{24} - c_{34} + c_{44} = 0\\
&c_{00} - c_{11} + c_{22} - c_{33} + c_{44} = 0\\
&c_{01} - c_{12} + c_{23} - c_{34} = 0\\
&c_{02} - c_{13} + c_{24} = 0\\
&c_{03} - c_{14} = 0\\
&c_{04} = 0\\
&c_{10} - c_{21} + c_{32} - c_{43} = 0\\
&c_{20} - c_{31} + c_{42} = 0\\
&c_{30} - c_{41} = 0\\
&c_{40} = 0\\
&c_{04} - c_{13} + c_{22} - c_{31} + c_{40} = 0\\
&c_{14} - c_{23} + c_{32} - c_{41} = 0\\
&c_{24} - c_{33} - c_{42} = 0\\
&c_{34} - c_{43} = 0\\
&c_{44} = 0\\
&c_{00} = 0\\
&c_{01} - c_{10} = 0\\
&c_{02} - c_{11} + c_{20} = 0\\
&c_{03} - c_{12} + c_{21} - c_{30} = 0\\
&c_{04} - c_{13} + c_{22} - c_{31} + c_{40} = 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Ci si convince senza difficoltà che fra queste 29 equazioni nelle 25 quantità $c_{ik}$, 25 sono linearmente indipendenti, la soluzione del sistema è dunque quella banale

$$c_{ik} = 0.$$

Prima di passare all'interpretazione di questo risultato, ricordiamo che [2] i caratteri $p_{ik}(X)$ di una varietà kähleriana $X$ di dimensioni $x$ soddisfa alle condizioni:

$$p_{ik} = p_{ki} = p_{x-i,\, x-k}\,,\ p_{x-h,\, x-i}\,.$$

Nella successione esatta che fornisce la quinta tra le equazioni della tabella

$$0 \to H'_{4,0}(V,\ W) \to H'_{4,0}(V) \to H'_{4,0}(W) \to H'_{4,1}(V,\ W) \to \ldots$$

si ricava

$$H'_{4,i}(V) \cong H'_{4,i}(V,\ W)$$

poichè $H_{4,i}(W) = 0$ in virtù di dim $W < 4$ (tutte le dimensioni sono *complesse*). Se ne ricava l'invarianza dei generi geometrici rispetto ad una modificazione:

$$p_{0,i}(V) = p_{0,i}(V').$$

Questa invarianza vale per le modificazioni delle varietà di dimensioni qualunque [4], nel nostro caso (come del resto per ogni varietà di dimensione $\geq 4$) si ottiene che una varietà $W'$ non può corrispondere ad un'altra $W$ in una modificazione altro che se i generi sono identici:

$$p_{0,i}(W) = p_{0,i}(W').$$

(Per dim $\geq 5$ si ottiene soltanto l'identità dei generi aritmetici). Per l'ulteriore discussione occorre distinguere diversi casi. Per semplificare l'enumerazione, supporremo dim $W <$ dim $W'$. La formula scritta sopra dà allora $P_{(0,\, \dim W)} = 0$:

*Ogni varietà, immagine di una varietà di dimensione inferiore, in una modificazione di una varietà di dimensione $\leq 4$, ha il genere geometrico nullo.*

**6.** dim $W' = 3$

$$\begin{aligned}
&p_{01}(W) = p_{01}(W') = p_{32}(W') = p_{32}(V') - p_{32}(V) = p_{12}(V') - \\
&\qquad\qquad - p_{12}(V) = p_{12}(W') - p_{12}(W) \\
(14)\quad &p_{02}(W) = p_{02}(W') = p_{31}(W') \\
&p_{03}(W') = p_{03}(W) = 0 \\
&p_{33}(W') = 1 = p_{11}(W') - p_{11}(W) = p_{22}(W') = p_{11}(W).
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che in ciascuno dei casi possibili (dim $W =$ $= 0, 1, 2$) i numeri $p_{ik}$ $(W')$ sono identici ai numeri $p_{ik}$ del prodotto diretto di $W$ con uno spazio proiettivo complesso di dimensione 3-dim $W$ (²). *Le modificazioni sono delle dilatazioni* [4].

**7.** dim $W' = 2$.

Si può escludere il caso dim $W = 0$. Per una varietà kähleriana si ha

$$p_{ii}(W') \geq 1, \quad i \leq \dim W'$$

quindi in ogni caso

$$p_{11}(W') \geq 1.$$

Ma

$$p_{11}(W') = p_{11}(V) - p_{11}(V') = p_{33}(V) - p_{33}(V') = p_{33}(W) \tag{15}$$

cioè dim $W' \stackrel{\circ}{=} 3$:

*Ogni modificazione kähleriana di una varietà in un punto, trasforma tale punto in una ipersuperficie.*

Sia allora dim $W = 1$, segue che

$$\begin{aligned} &p_{21}(W') = p_{01}(W') = p_{01}(W), \\ &p_{22}(W') = 1 \\ &p_{11}(W') - p_{11}(W) = p_{11}(V') - p_{11}(V) = p_{33}(V') - p_{33}(V) = \\ &\qquad\qquad = p_{33}(W') - p_{33}(W) = 0. \quad (p_{11}(W) = 1). \end{aligned} \tag{16}$$

L'ultima relazione mostra che questa trasformazione non rientra nella categoria delle dilatazioni.

## BIBLIOGRAFIA

[1] W. V. D. Hodge, *Differential forms on a Kähler manifold,* « Proc. Cambridge Phil. Soc. », 47 (3), 1951, 504-517.

[2] H. Guggenheimer, *Ueber komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik,* « Comm. Math. Helv. », XXV, 1951, p. 257-297.

[3] H. Guggenheimer, *Saggi di topologia delle varietà complesse,* « Memorie Bologna », in corso di pubblicazione.

[4] H. Guggenheimer, *Modifications of Kähler manifolds,* « Annali di Mat. », in corso di pubblicazione.

(²) Per dim $W = 0$ si ha un caso particolare di un teorema dovuto a M. Aeppli.