Bollettino Unione Matematica Italiana

Pia Nalli

Equazioni indipendenti dalla scelta delle variabili e caratterizzazione di varietà metriche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 135–146.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_135_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Equazioni indipendenti dalla scelta delle variabili e caratterizzazione di varietà metriche.

Nota di Pia Nalli (a Catania)

Sunto. - *Si portano degli esempi di sistemi che non sono quelli delle componenti di un tensore ma si trasformano linearmente; si mostra poi come con l'annullarsi di un sistema di questo tipo si possono caratterizzare fatti geometrici e fisici.*

1. È noto il fondamento del Calcolo Tensoriale: quando si fa un cambiamento di variabili le componenti di un tensore si trasformano linearmente.

Ma esistono altri sistemi che non sono quelli delle componenti di un tensore che si trasformano nello stesso modo.

Ne porterò degli esempi, dai quali non sarà difficile dedurre un procedimento per mezzo del quale se ne possono ottenere molti altri.

Eccone uno. Si hanno tre sistemi; due doppi, $H(r, s)$ e $K(r, s)$ ed uno triplo, $N(r, s, p)$.

Nei primi due intervengono tutte le coppie di numeri r, s diversi, scelti fra $1, 2, \dots, n$; nel terzo tutte le terne r, s, p con $p \neq r, s$.

Posto

$$T(i, j;\ r) = \frac{1}{2} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j}$$

e

$$S(i, j, h;\ r) = \frac{1}{2} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_h},$$

la legge di trasformazione è la seguente

$$
\begin{aligned}
\bar{H}(r,\ s) = H(i,\ j)\left[\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} - T(i,\ j;\ r)\right] + \\
K(i,\ j)\left[\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} - T(i,\ j;\ r)\right] + \\
N(i,\ j,\ h)\left[\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_h} - S(i,\ j,\ h;\ r)\right],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{K}(r,\ s) = H(i,\ j)\left[\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} - T(i,\ j;\ r)\right] + \\
K(i,\ j)\left[\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_j} - T(i,\ j;\ r)\right] + \\
N(i,\ j,\ h)\left[\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial \bar{x}_s}{\partial x_h} - S(i,\ j,\ h;\ r)\right],
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{N}(r,\ s,\ p) = H(i,\ j)\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} + \\
K(i,\ j)\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_j} + N(i,\ j,\ h)\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_s}\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_h}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Per conseguenza, se le H, K, N sono nulle per un sistema di variabili esse lo saranno per qualunque sistema.

Può quindi accadere che una legge geometrica, fisica o di altra natura si possa tradurre invece che con sole equazioni tensoriali, anche con equazioni del tipo $H = 0$, $K = 0$, $N = 0$, ed ancora di altro tipo (come accenneremo alla fine della presente Nota) ma sempre soddisfacenti alla condizione di indipendenza dalla scelta delle variabili, cioè delle coordinate.

Esempi geometrici ne daremo.

A tale scopo notiamo: se P^h_{ij} è un tensore triplo con due indici di covarianza, i ed j, ed uno di controvarianza h, il sistema

$$
\left.\begin{aligned}
H(i,\ j) = P^j_{ij} - \frac{1}{2}P^i_{ii}, \\
K(i,\ j) = P^j_{ji} - \frac{1}{2}P^i_{ii},
\end{aligned}\right\}
\quad \begin{matrix}(i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \\ j \neq i\end{matrix}
$$

$$
N(i,\ j,\ h) = P^h_{ij}, \qquad h \neq i,\ j
$$

si trasforma con la legge soprascritta.

Inversamente: se il sistema H, K, N si trasforma secondo la detta legge, fissato comunque un sistema semplice φ_i e posto per $i \neq j$

$$P^j_{ij} = H(i, j) + \frac{1}{2}\varphi_i, \qquad P^j_{ji} = K(i, j) + \frac{1}{2}\varphi_i,$$

$$P^i_{ii} = \varphi_i, \; P^h_{ij} = N(i, j, h) \quad h \neq i, j,$$

ed inoltre:

$$\bar{\varphi}_r = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\varphi_i + \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_j}\Big[H(i, j) + K(i, j)\Big] + \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_r}\frac{\partial \bar{x}_r}{\partial x_h} N(i, j, h),$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{P}^s_{rs} &= \bar{H}(r, s) + \frac{1}{2}\bar{\varphi}_r, \\ \bar{P}^s_{sr} &= \bar{K}(r, s) + \frac{1}{2}\bar{\varphi}_r, \end{aligned}\right\} \; s \neq r$$

$$\bar{P}^r_{rr} = \bar{\varphi}_r, \qquad \bar{P}^p_{rs} = \bar{N}(r, s, p) \qquad p \neq r, s,$$

il sistema $P^\alpha_{\mu\nu}$ è un tensore che col cambiamento delle variabili acquista le componenti $\bar{P}^\alpha_{\mu\nu}$.

E si può constatare che se P^h_{ij} è un tensore per il quale il corrispondente sistema H, K, N è nullo, risulta

$$\bar{P}^r_{rr} = P^i_{ii}\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r},$$

cioè il sistema semplice P^i_{ii} è quello delle componenti covarianti di un vettore.

Inversamente: da qualunque vettore B_i si può ottenere un tensore P^h_{ij} per il quale il corrispondente sistema H, K, N è nullo. Bisognerà porre $P^h_{ij} = 0$ per tutte le terne i, j, h con $h \neq i, j$, $P^j_{ij} = P^j_{ji} = \frac{1}{2}B_i$ se $i \neq j$ e $P^i_{ii} = B_i$.

Ed ecco ora un fatto geometrico che si può caratterizzare con l'annullarsi di un sistema H, K, N.

Siano V_n e V_n' due varietà metriche ad n dimensioni messe in corrispondenza puntuale biunivoca. Riferite le due varietà alle stesse coordinate e denotando con $\left\{ {i\,j \atop h} \right\}$ ed $\left\{ {i\,j \atop h} \right\}'$ i simboli di CHRISTOFFEL per le due varietà, è noto che la differenza $\left\{ {i\,j \atop h} \right\}' - \left\{ {i\,j \atop h} \right\}$ è un tensore ρ^h_{ij}.

Per tale tensore si formi il corrispondente sistema H, K, N. Se esso è nullo per una particolare coppia di punti corrispondenti

P, P' tale annullarsi non dipende dalla scelta delle coordinate. Esso è dunque la traduzione di un fatto geometrico, e, precisamente, del seguente: esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè si corrispondano nelle due varietà le linee che, passando per P e P', abbiano rispettivamente in P e P' curvatura geodetica nulla. In tal caso resta individuato un vettore le cui componenti sono $B_i = \left\{ {i \atop i} \; {i \atop \,} \right\}' - \left\{ {i \atop i} \; {i \atop \,} \right\}$, o meglio, restano individuati due vettori uno per la V_n applicato in P e l'altro in P' per la V_n'. E con tale vettore si forma il tensore ρ_{ji}^h per la coppia di punti P, P'.

Se poi il sistema H, K, N è identicamente nullo, è nullo cioè per qualunque coppia P, P', la corrispondenza fra le due varietà conserva le geodetiche, ed inversamente. Resta allora determinato un campo di vettori in ognuna delle due varietà. Tale è il caso di due varietà euclidee in corrispondenza proiettiva; ad ogni proiettività corrisponde un campo vettoriale. Ma lo stesso campo si ha per infinite proiettività

I vettori sono nulli per le affinità e solo per esse. I campi coincidono per tutte le proiettività che hanno lo stesso spazio limite (spazio ad $n-1$ dimensioni).

Per esempio: $n=2$; V_2 e V_2'.

Riferita la prima a coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2 e la seconda a coordinate cartesiane ortogonali x, y, risulta

$$x = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}}$$

$$y = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}}.$$

Le due varietà le pensiamo riferite alle stesse coordinate x_1, x_2, quindi i simboli $\left\{ {i \; j \atop h} \right\}$ sono nulli. Per la V_2', posto

$$u = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33},$$

risulta:

$$\left\{ {1 \; 1 \atop 1} \right\}' = 2 \left\{ {1 \; 2 \atop 2} \right\}' = -2\frac{a_{31}}{u}$$

$$\left\{ {2 \; 2 \atop 2} \right\}' = 2 \left\{ {1 \; 2 \atop 1} \right\}' = -2\frac{a_{32}}{u}$$

$$\left\{ {1 \; 1 \atop 2} \right\}' = \left\{ {2 \; 2 \atop 1} \right\}' = 0.$$

Il vettore corrispondente ha le componenti

$$B_1 = -2\frac{a_{31}}{u}, \qquad B_2 = -2\frac{a_{32}}{u}.$$

È nullo per le affinità. È lo stesso per due proiettività aventi in V_2 la stessa retta limite $u = 0$. Non mi dilungo su facili deduzioni.

Altro esempio: una V_2 euclidea è in corrispondenza con una V_2' a curvatura costante C. La corrispondenza conserva le geodetiche.

Riferita la V_2 a coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2, il tensore fondamentale della V_2' è:

$$a'_{11} = \frac{1 + Cx_2^2}{v}, \quad a'_{12} = \frac{-2Cx_1x_2}{v}, \quad a'_{22} = \frac{1 + Cx_1^2}{v}$$

con

$$v = 1 + C(x_1^2 + x_2^2).$$

Si trova

$$\left\{ \begin{matrix} i\ i \\ i \end{matrix} \right\} = -\frac{2Cx_i}{v}$$

e queste, per $i = 1, 2$ sono le componenti B_i di un vettore per la particolare scelta di coordinate.

Per coordinate generiche $\bar{x}_i$ sarà invece

$$\overline{B}_r = \overline{\left\{ \begin{matrix} r\ r \\ r \end{matrix} \right\}'} - \overline{\left\{ \begin{matrix} r\ r \\ r \end{matrix} \right\}} = B_i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_r}.$$

È stato appunto prendendo in considerazione le corrispondenze conservanti le geodetiche che mi si è presentata l'opportunità di formare il sistema H, K, N in dipendenza da un tensore P_{ij}^h ed in seguito la formulazione delle leggi (1), (2), (3) indipendentemente dal tensore.

E qui si chiede: a quale risultato si perverrà cercando le condizioni necessarie e sufficienti perchè la corrispondenza puntuale tra V_n e V'_n $(n > 2)$ sia tale che si corrispondano le curve aventi nulla la seconda curvatura? E giacchè in una V_n una curva ha $n - 1$ curvature, la domanda è immediatamente generalizzabile.

2. Ma altre quistioni si presentano.

È noto che si può caratterizzare una varietà metrica con equazioni tensoriali. Per esempio: l'annullarsi del tensore di RIEMANN $R_{ij,hk}$ caratterizza le varietà euclidee.

L'equazione tensoriale $R_{ij\,,\,hk} = C(a_{ih}a_{jk} - a_{ik}a_{jh})$, C costante, caratterizza le varietà a curvatura costante C. Per $C = 0$ si ricade nel caso precedente.

Per $n = 4$ l'equazione $R_{\mu\nu} = 0$, dove $R_{\mu\nu}$ è il noto tensore contratto di RIEMANN, caratterizza lo spazio-tempo in assenza di materia della relatività generale.

Il fatto che l'annullarsi di $R_{\mu\nu}$ è indipendente dalla scelta delle coordinate, dà alla legge fisica $R_{\mu\nu} = 0$ carattere di indipendenza da qualunque riferimento, da qualunque osservatore. Ciò è esatto, ma non esclude (come risulta da quanto precedentemente esposto) l'esistenza di altri tipi di equazioni rispondenti alle stesse esigenze. Certamente meno semplici delle equazioni tensoriali, ma non troppo più complicate.

Indubbiamente il fisico ha il diritto di servirsi per i suoi schemi degli strumenti matematici che giudica più idonei ai suoi scopi, ma quando egli, o chi per lui, mette in luce le ragioni ed i vantaggi della scelta, il matematico può far notare che le stesse ragioni potrebbero militare per un'altra scelta, salvo il diritto del fisico riguardo ai vantaggi. Fra i quali anche la maggiore semplicità.

Le equazioni $R_{\mu\nu} = 0$ sono dieci e dieci sono pure le incognite, e cioè le componenti del tensore fondamentale che caratterizza lo spazio-tempo.

Se le equazioni fossero indipendenti, esse, con l'aggiunta delle condizioni ai limiti, non solo determinerebbero il tensore ma fisserebbero le coordinate di riferimento. Quindi non sarebbero accettabili. Ma esse non sono indipendenti, perchè il tensore $R_{\mu\nu}$ soddisfa a quattro identità: quelle che traducono, in base alle identità di BIANCHI, l'annullarsi del vettore divergenza di $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$. Per tale ragione le equazioni $R_{\mu\nu} = 0$ non sono dieci, ma soltanto sei, comportando quindi l'arbitrarietà di quattro funzioni di quattro variabili, in concordanza con la scelta arbitraria delle coordinate.

Mi sono chiesta più volte: fra le equazioni $R_{ij\,,\,hk} = 0$, che caratterizzano le varietà euclidee, e che, quando sono soddisfatte, portano come conseguenza $R_{\mu\nu} = 0$, quante sono le indipendenti?

Confesso che non sono riuscita a darmi una risposta.

Anzitutto, dato che le $R_{ij\,,\,hk} = 0$ portano come conseguenza $R_{\mu\nu} = 0$ e queste ultime sono sei, devo concludere che le $R_{ij\,,\,hk} = 0$ non possono essere meno di sei. Dato poi che le $R_{ij\,,\,hk} = 0$ comportano anche l'arbitrarietà delle coordinate, e cioè quattro funzioni arbitrarie di quattro variabili, le equazioni non possono essere più di sei. Devo concludere che sono sei. Ma allora il sistema $R_{ij\,,\,hk} = 0$ è equivalente al sistema $R_{\mu\nu} = 0$? Questo non è. Ed allora?

Nessun lume mi porta il fatto che fra i simboli $R_{ij\,,\,hk}$ solo venti sono linearmente indipendenti e che quindi il sistema $R_{ij\,,\,hk} = 0$ si riduce a venti equazioni. L'indipendenza lineare non esclude altre dipendenze: per es.: x ed x^2 sono linearmente indipendenti, ma le equazioni $x = 0$, $x^2 = 0$ non sono due.

Penso che tutto il gioco lo facciano le identità di Bianchi.

Così come accade per la divergenza di $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$. L'annullarsi identicamente di tale divergenza si riduce in fondo a dipendenze lineari, a coefficienti non costanti, fra le componenti di $R_{\mu\nu}$ e le loro derivate parziali prime. Allo stesso modo che le identità di Bianchi per il tensore $R_{ij\,,\,hk}$. Io non so quante sono le indipendenti fra le equazioni $R_{ij\,,\,hk} = 0$: penso che saranno sei (senza che ciò sia in contraddizione col fatto che sei siano anche le equazioni $R_{\mu\nu} = 0$, come alcune quistioni di cui dirò in seguito mi autorizzano a ritenere).

A me pare che il compito di fissare quante sono le equazioni indipendenti in un sistema di equazioni alle derivate parziali del second'ordine sia piuttosto arduo. Senza contare poi che per certi problemi occorre rimanere nel campo reale. Per es.: $x^2 + y^2 = 0$ è una equazione nel campo complesso, ma sono due nel campo reale.

A mio parere si può dire questo: se si ha un sistema di equazioni in certe funzioni incognite di n variabili, per le quali funzioni è assegnata una legge di trasformazione quando si opera un cambiamento di variabili, se il sistema si riproduce quando si opera un cambiamento di variabili ed è compatibile (cioè ammette qualche soluzione nel campo in cui occorre considerarlo, il che in alcuni casi è di evidenza immediata), la soluzione comporta sempre l'arbitrarietà di n funzioni di n variabili ed, eventualmente, altre arbitrarietà.

Nulla ci può dire il confronto del numero delle equazioni con quello delle funzioni incognite: assicurata la compatibilità, anche se il numero delle equazioni eguaglia o supera quello delle incognite, stabilire il numero delle equazioni indipendenti può non avere nessuna importanza pratica.

Per l'equazione $R_{\mu\nu} = 0$ che è compatibile nel campo reale, perchè è soddisfatta da una varietà euclidea, ma comporta soluzioni non euclidee, potrebbe la soluzione generale dipendere da quattro funzioni arbitrarie di quattro variabili e da costanti arbitrarie in numero finito. Sarebbe questa la possibilità più semplice e soltanto le costanti arbitrarie distinguerebbero lo spazio-tempo da una V_4 euclidea. Le costanti avrebbero significato fisico.

Nel tensore fondamentale dello spazio-tempo g_{ij} le quattro funzioni arbitrarie interverrebbero sia direttamente sia per mezzo delle loro derivate parziali prime, e precisamente sarebbe :

$$g_{ij} = f_{rs} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j},$$

le φ_h quattro funzioni arbitrarie delle quattro variabili x_k, le f_{rs} dieci funzioni delle φ_h e di un certo numero di costanti arbitrarie. Con tali funzioni g_{ij} sarebbe soddisfatto il sistema $R_{\mu\nu} = 0$; imponendo invece la condizione più restrittiva $R_{ij,hk} = 0$ ne risulterebbero solo legami fra le costanti arbitrarie.

Talvolta nella soluzione di un sistema indipendente dalla scelta delle variabili potrebbero figurare oltre n funzioni arbitrarie di n variabili per il cambiamento arbitrario di esse ed un certo numero di costanti arbitrarie, altre arbitrarietà. Talvolta però esse non sarebbero essenziali e perciò eliminabili.

Per esempio: per $n = 2$

$$a_{ij} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + [f(\varphi_1) + g(\varphi_2)] \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j},$$

dove f e g sono funzioni arbitrarie di un solo argomento e φ_1 e φ_2 funzioni arbitrarie di due variabili, è sempre il tensore di una V_2 euclidea e quindi come soluzione della $R_{12,\,12} = 0$ non si ha niente di più generale della particolare soluzione in cui f e g sono identicamente nulle.

Ben diverso invece è quest'altro caso: V_2 e V_2', entrambe euclidee, sono messe in corrispondenza conforme.

Qui le incognite sono sei: le tre a_{ij} e le tre a'_{ij}. Le equazioni sono quattro e cioè

$$\frac{a'_{11}}{a_{11}} = \frac{a'_{12}}{a_{12}} = \frac{a'_{22}}{a_{22}}; \qquad R_{12,\,12} = 0, \quad R'_{12,\,12} = 0.$$

Riferita la V_2 a coordinate cartesiane ortogonali è $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, quindi $a'_{12} = 0$ e

$$a'_{11} = a'_{22} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2$$

dove U è una funzione armonica delle due variabili x_1 e x_2.

La U è dunque una soluzione dell'equazione di LAPLACE mentre nel caso precedente interveniva la funzione $f(x_1)+g(x_2)$, soluzione dell'equazione $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}=0$. Però, mentre allora si poteva assumere senz'altro $V=0$, nel secondo la U è essenziale e la soluzione generale del sistema è

$$a_{ij}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j},$$

$$a'_{ij}=a_{ij}T(x_1, x_2)$$

in cui la $T(x_1, x_2)$ si ottiene da una funzione $U(z_1, z_2)$ armonica delle due variabili z_1, z_2 formando $\left(\frac{\partial U}{\partial z_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z_2}\right)^2$ e ponendo poi in questa funzione di z_1, z_2 al posto delle variabili z_1 e z_2, le solite funzioni arbitrarie di x_1 ed x_2.

3. Vogliamo ora, utilizzando i risultati della prima parte, dare ancora un esempio il quale mostra come una varietà metrica si possa caratterizzare con equazioni che, pur non essendo tensoriali, non dipendono dalla scelta delle variabili.

Sia una V_n caratterizzata o da caratterizzare in un qualunque modo, a_{ij} il suo tensore fondamentale. V_n' è un'altra varietà in corrispondenza con la V_n, b_{ij} il suo tensore, $b_{ij}^{/h}$ il derivato controvariante di questo con referenza alla V_n.

In base ai risultati della prima parte le equazioni

$$b_{ii}^{/i}=2b_{ij}^{/j} \quad i \neq j, \qquad b_{ij}^{/h}=0 \quad h \neq i, j \tag{4}$$

(compatibili perchè esiste la soluzione $b_{ij}=a_{ij}$ essendo $a_{ij}^{/h}=0$ per qualunque terna i, j, h) sono indipendenti dalla scelta delle variabili.

Per semplicità supponiamo $n=2$ e caratterizziamo la V_2 supponendola euclidea. Le equazioni fra sei incognite sono cinque, e cioè

$$b_{11}^{/1}=2b_{12}^{/2}, \quad b_{11}^{/2}=b_{22}^{/1}=0, \quad b_{22}^{/2}=2b_{12}^{/1}; \quad R_{12,12}=0. \tag{4'}$$

Scegliendo per la V_2 coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2 le incognite si riducono a tre (le b_{ij}) e le equazioni sono:

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial x_1}=2\frac{\partial b_{12}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial b_{11}}{\partial x_2}=\frac{\partial b_{22}}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial b_{22}}{\partial x_2}=2\frac{\partial b_{12}}{\partial x_1}.$$

E da queste si trae:

$$b_{11} = \alpha x_1^2 + \beta_1 x_1 + \gamma_1$$

$$b_{22} = \alpha x_2^2 + \beta_2 x_2 + \gamma_2$$

$$b_{12} = \alpha x_1 x_2 + \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2 + \delta.$$

Se $\alpha \neq 0$ passando da coordinate cartesiane ortogonali ad altre pure cartesiane ortogonali possiamo ridurci a:

$$b_{11} = \alpha x_1^2 + \gamma_1, \quad b_{22} = \alpha x_2^2 + \gamma_2, \quad b_{12} = \alpha x_1 x_2 .$$

Se $\alpha = 0$ a

$$b_{11} = \beta_1 x_1 + \gamma_1, \quad b_{22} = \beta_2 x_2 + \gamma_2, \quad b_{12} = \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2 .$$

Per avere la soluzione generale che non fissa le coordinate bisogna procedere nel solito modo: in coordinate generiche $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, con $x_i = \varphi_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ si ha

$$\bar{a}_{rs} = \sum_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{x}_s} \qquad \bar{b}_{rs} = \sum_{ij} b_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{x}_s}$$

dove nelle b_{ij} bisogna mettere $\varphi_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $\varphi_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ al posto di x_1 ed x_2. Analogamente si tratta per $n > 2$ e V_n euclidea.

La V_n', anche per $n = 2$ non è euclidea. Diventa euclidea se $\alpha = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

La V_n', anche se $n = 2$ non può essere a curvatura costante non nulla, quindi se $n = 2$ il sistema (4′) al quale si aggiunga l'equazione $R'_{12,\,12} = C(b_{11}b_{22} - b^2_{12})$, $C \neq 0$, pur essendo di sei equazioni fra sei incognite, non ammette soluzione.

Se $C = 0$ il sistema è compatibile (ammette infatti la soluzione $b_{ij} = a_{ij}$). Imponendo alla soluzione delle (4′) la $R'_{12,\,12} = 0$ si hanno solo condizioni per le costanti arbitrarie: $\alpha = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Nel caso generale (4) al quale si aggiungano le equazioni $R_{ij,\,hk} = 0$ (cioè V_n euclidea) o altre che possano caratterizzare la V_n, vengono a individuarsi i due campi vettoriali, l'uno in V_n e l'altro in V_n', col vettore $B_i = b_{ii}^{/i}$.

Osserviamo intanto che il sistema (4) al quale si aggiungano le $R_{ij,\,hk} = 0$ permette di caratterizzare una V_n' partendo da una V_n caratterizzata a sua volta dalle $R_{ij,\,hk} = 0$. Ed allora vien fatto di pensare: per $n = 4$ una V_4 euclidea è stata ritenuta troppo restrittiva per fondarvi la teoria della relatività generale. Invece l'unica equazione (ma è poi certo che sia unica? l'equazione $x^2 + y^2 = 0$ nel campo reale ci mette in guardia)

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 0$$

troppo poco restrittiva, ed il fisico ha fatto la sua scelta: $R_{\mu\nu} = 0$. E non si presterebbe una V_4' ottenuta nel modo su esposto per una teoria relativistica? E le costanti arbitrarie, il campo vettoriale, non potrebbero dare luogo ad interpretazioni fisiche? In caso affermativo gli schemi guadagnerebbero infinitamente dal punto di vista della semplicità.

Altra osservazione: partendo da una V_2 euclidea si passa ad una V_2' a curvatura costante quando si pensi ad una corrispondenza che conservi le geodetiche. Ma partendo da una V_2' e cercando le V_2'' che si possano mettere in corrispondenza con la V_2' conservando le geodetiche, si ritrovano le stesse V_2'. Il ciclo si chiude.

Accadrà lo stesso per quanto riguarda le (4)? Per esempio: partendo da una V_n caratterizzata in un modo qualunque (per esempio euclidea) si arrivi alle V_n'. Partendo da una V_n' dove si arriverà? Se il ciclo si chiude, se, cioè le V_n'' coincidono con le V_n', nulla più da fare. Se così non è si potrà passare alle V_n''' e così via, finchè il ciclo si chiuda, o, in caso contrario, si potrà continuare all'infinito.

Si potrebbe partire da una V_n euclidea per formare la catena, o da una V_n a curvatura costante, o, in generale da una V_n caratterizzata in qualche modo, non escluso $R_{\mu\nu} = 0$ della relatività.

Altro problema con altra eventuale catena ed eventuale teoria relativistica: trovare una V_n' tale che esista una V_n euclidea per la quale il derivato controvariante $a_{ij}^{/h}$ del tensore fondamentale (derivato con referenza alla V_n') soddisfi alle $a_{ii}^{/i} = 2a_{ij}^{/j}\,(i \neq j)$, $a_{ij}^{/h} = 0\,(h \neq i,\, j)$. Qui le incognite sono $n(n+1)$: le a_{ij} della V_n, le b_{ij} della V_n'; le equazioni: le soprascritte e $R_{ij,\,hk} = 0$, sono compatibili, perchè c'è la soluzione $b_{ij} = a_{ij}$ quando a_{ij} è il tensore di una qualunque V_n euclidea.

Tanti e tanti altri problemi si potrebbero porre.

A tutto ciò sono arrivata partendo da un tensore P_{ij}^h. Ma altri risultati, che spero far conoscere in altre pubblicazioni, si possono ottenere partendo da un tensore P_{ijh}^k e, più in generale da un tensore con r indici di controvarianza ed $s \geq r$ di covarianza.

4. Vogliamo chiudere accennando ad un altro ordine di idee. Le (1), (2), (3) si possono interpretare come operazioni lineari che fanno passare dal sistema di $n(n^2-1)$ elementi H, K, N al sistema $\overline{H}$, $\overline{K}$, $\overline{N}$.

Passando dal discreto al continuo si presenta immediata la seguente trasformazione lineare di tre funzioni $H(x, y)$, $K(x, y)$, $N(x, y, z)$ in tre funzioni $\overline{H}(r, s)$, $\overline{K}(r, s)$, $\overline{N}(r, s, t)$: ogni variabile varia nell'intervallo (a, b).

$$(1') \qquad \overline{H}(r, s) = \int_R P(x, y; r, s)H(x, y)dxdy +$$

$$\int_R Q(x, y; r, s)K(x, y)dxdy + \int_V S(x, y, z; r, s)N(x, y, z)dxdydz,$$

$$(2') \qquad \overline{K}(r, s) = \int_R Q(x, y; r, s)H(x, y)dxdy +$$

$$\int_R P(x, y; r, s)K(x, y)dxdy + \int_V S(y, x, z; r\ s)N(x, y, z)dxdydz.$$

$$(3') \qquad \overline{N}(r, s, t) = \int_R X(x, y; r; s, t)H(x, y)dxdy +$$

$$\int_R X(y, x; r, s, t)K(x, y)dxdy + \int_V Y(x, y, z; r, s, t)N(x, y, z)dxdydz,$$

dove R è il rettangolo $(a, b)(a, b)$ e V il cubo $(a, b)(a, b)(a, b)$.

Imponendo ai nuclei P, Q, S, X, Y opportune condizioni si può avere una perfetta analogia con le (1), (2), (3). (Prima fra tutte che il prodotto di due trasformazioni di tale tipo è ancora una trasformazione del medesimo tipo). E come per queste abbiamo introdotto un sistema semplice arbitrario φ_i dal quale si ottiene poi il sistema trasformato $\overline{\varphi}_r$, passando così alla legge di trasformazione di un tensore P_{ij}^h e viceversa, per le corrispondenti (1)', (2)', (3)' si introduce una funzione arbitraria $\varphi(x)$ nell'intervallo (a, b), ottenendo in corrispondenza una $\overline{\varphi}(r)$ ed una legge di trasformazione di $\varphi(x)$, $H(x, y)$, $K(x, y)$, $N(x, y, z)$ in $\overline{\varphi}(r)$, $\overline{H}(r, s)$, $\overline{K}(r, s)$, $\overline{N}(r, s, t)$ analoga alla suddetta legge tensoriale.

Si presentano varie questioni: per es.: assegnate le $\overline{H}(r, s)$, $\overline{K}(r, s)$, $\overline{N}(r, s, t)$ trovare $H(x, y)$, $K(x, y)$, $N(x, y, z)$ ed altre ancora.