Bollettino
Unione Matematica Italiana

Maria Teresa Vacca

Su un problema più generale di quello di De Brun per il moto di un corpo rigido intorno a un punto fisso.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 52–58.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_52_0>

Su un problema più generale di quello di De Brun per il moto di un corpo rigido intorno a un punto fisso.

Nota di MARIA TERESA VACCA (a Torino)

Sunto. - *Si studia il moto di un corpo rigido con un punto fisso, sollecitato da forze di tipo particolare. Si trova che l'esistenza di tre integrali primi consente di ridurre l'integrazione delle equazioni del moto alla ricerca di un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi, il quale risulta espresso per mezzo di un integrale di un differenziale esatto.*

1. Il problema di F. DE BRUN [1] riguarda lo studio del movimento di un corpo rigido, le cui molecole sono attratte da un piano fisso, proporzionalmente alla distanza da questo piano, nell'ipotesi che il corpo abbia in esso un punto fisso.

Nel nostro caso la forza agente sul generico punto P_i del corpo, di massa m_i, sia della forma

$$\text{(I)} \qquad F_i = m_i(ax_i i + by_i j + cz_i k) \times \chi \cdot \chi$$

ove x_i, y_i, z_i sono le coordinate di P_i rispetto alla terna $O(xyz)$ di assi principali d'inerzia relativi al punto fisso O; a, b. c sono delle costanti; i, j, k sono i versori degli assi; χ un versore fisso.

Essendo λ una dilatazione avente come direzioni unite quelle degli assi x, y, z, tale cioè che

$$\lambda i = ai, \quad \lambda j = bj, \quad \lambda k = ck,$$

la forza F_i si può scrivere nella forma più semplice

$$F_i = m_i \lambda (P_i - O) \times \chi \cdot \chi.$$

Indicando con α, β, γ i coseni direttori di χ rispetto agli assi x, y, z risulta

$$\chi = \alpha i + \beta j + \gamma k,$$

dove α, β, γ durante il moto saranno funzioni del tempo.

2. Calcoliamo ora i momenti delle forze rispetto agli assi. Poichè il momento risultante delle forze applicate, rispetto al

(1) P. APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle*, Gauthier-Villars, Paris, (1953), t. II, ch. XXV, n. 499.

punto fisso O, è dato da

$$\boldsymbol{M} = \Sigma_i m_i \lambda (P_i - O) \times \chi \cdot (P_i - O) \wedge \chi =$$
$$= \Sigma_i m_i (a\alpha x_i + b\beta y_i + c\gamma z_i) \cdot (P_i - O) \wedge \chi,$$

si ha

$$M_x = \Sigma_i\, m_i (a\alpha x_i + b\beta y_i + c\gamma z_i)(\gamma y_i - \beta z_i) = \beta\gamma(b\, \Sigma\, m_i y_i^2 - c\, \Sigma_i\, m\, z_i^2).$$

Indicando con A, B, C i momenti principali d'inerzia rispetto ad O, si ricava facilmente

$$M_x = \frac{1}{2}\beta\gamma[b(C + A - B) - c(A + B - C)]$$

e analogamente

$$M_y = \frac{1}{2}\gamma\alpha[c(A + B - C) - a(B + C - A)]$$

$$M_z = \frac{1}{2}\alpha\beta[a(B + C - A) - b(C + A - B)].$$

Ponendo

$$P = -\frac{1}{2}a(B + C - A), \quad Q = -\frac{1}{2}b(C + A - B), \quad R = -\frac{1}{2}c(A + B - C),$$

dove P, Q, R sono costanti, possiamo scrivere

$$M_x - \beta\gamma(R - Q), \quad M_y = \gamma\alpha(P - R), \quad M_z = \alpha\beta(Q - P).$$

Le equazioni euleriane del moto risultano:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A\frac{dp}{dt} - (B - C)qr = \beta\gamma(R - Q) \\ & B\frac{dq}{dt} - (C - A)rp = \gamma\alpha(P - R) \\ & C\frac{dr}{dt} - (A - B)pq = \alpha\beta(Q - P), \end{aligned} \right.$$

a cui vanno associate le equazioni di POISSON

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q \\ & \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r \\ & \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p. \end{aligned} \right.$$

Moltiplicando le equazioni (1) rispettivamente per p, q, r, sommando e tenendo conto delle (2), si ha

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = -P\alpha\frac{d\alpha}{dt} - Q\beta\frac{d\beta}{dt} - R\gamma\frac{d\gamma}{dt},$$

da cui si deduce l'integrale dell'energia

$$(3) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + P\alpha^2 + Q\beta^2 + R\gamma^2 = h$$

ove h è costante.

Moltiplichiamo ora le equazioni (1) rispettivamente per α, β, γ e sommiamo; si ha

$$A\alpha\frac{dp}{dt} + B\beta\frac{dq}{dt} + C\gamma\frac{dr}{dt} + Ap(\beta r - \gamma q) + Bq(\gamma p - \alpha r) + Cr(\alpha q - \beta p) = 0$$

e tenendo conto delle (2)

$$A\frac{d}{dt}(\alpha p) + B\frac{d}{dt}(\beta q) + C\frac{d}{dt}(\gamma r) = 0$$

da cui segue l'integrale del momento scalare della quantità di moto

$$(4) \qquad Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma = k_1$$

ove k_1 è costante.

Moltiplicando infine le equazioni (1) rispettivamente per Ap, Bq, Cr e sommando si ottiene

$$(5) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) = A(R-Q)p\beta\gamma + B(P-R)q\gamma\alpha + C(Q-P)r\alpha\beta.$$

Se le costanti P, Q, R sono tali che

$$(6) \qquad A(R-Q) + B(P-R) + C(Q-P) = 0 \quad [2],$$

se cioè sussiste la relazione

$$A[b(C+A-B) - c(A+B-C)] + B[c(A+B-C) - a(B+C-A)] + \\ + C[a(B+C-A) - b(C+A-B)] = 0,$$

[2] Nel caso di DE BRUN le quantità $R-Q$, $P-R$, $Q-P$ sono proporzionali alle differenze $C-B$, $A-C$, $B-A$ e la relazione (6) è senz'altro verificata.

ovvero

$$(6') \quad a(B+C-A)(C-B)+b(C+A-B)(A-C)+c(A+B-C)(B-A)=0,$$

la (5) si può scrivere

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)=A(R-Q)\beta\cdot(p\gamma-r\alpha)+B(P-R)\alpha\cdot(q\gamma-r\beta),$$

cioè, avendo riguardo alla prima ed alla seconda delle equazioni (2), risulta

$$(7) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[A(R-Q)\beta^2-B(P-R)\alpha^2].$$

Analogamente dalla (5), tenendo conto della identità (6), si hanno le equazioni

$$(7') \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[B(P-R)\gamma^2-C(Q-P)\beta^2] \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[C(Q-P)\alpha^2-A(R-Q)\gamma^2], \end{aligned}$$

che sono equivalenti alla (7).

Se allora poniamo

$$\begin{aligned} L&=B(P-R)-C(Q-P) \\ M&=C(Q-P)-A(R-Q) \\ N&=A(R-Q)-B(P-R) \end{aligned}$$

dalle (7) e (7') segue l'integrale

$$(8) \quad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2+\frac{1}{3}(L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2)=k_2,$$

ove k_2 è costante.

Dunque, quando un corpo rigido con un punto fisso è sollecitato da forze del tipo (I) in cui le costanti a, b, c sono legate ai momenti d'inerzia dalla relazione (6) [ovvero (6')], oltre l'integrale (3) dell'energia, l'integrale (4) del momento scalare della quantità di moto, esiste anche l'integrale quadratico (8) e questi integrali consentono di ridurre la risoluzione del problema alle quadrature.

3. Introduciamo in luogo di p, q, r, α, β, γ le variabili canoniche

$$\vartheta_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad \varphi_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}, \quad \psi_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}, \ \vartheta, \ \varphi, \ \psi,$$

ove ϑ, φ, ψ sono gli angoli di Eulero, mentre ϑ_1, φ_1, ψ_1 sono le variabili coniugate rispettivamente di ϑ, φ, ψ.

Sappiamo che sussistono tra p, q, r, α, β, γ e gli angoli di Eulero le relazioni

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ q &= \dot{\psi} \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta - \dot{\vartheta} \operatorname{sen} \varphi \\ r &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta \\ \beta &= \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta \\ \gamma &= \cos \vartheta; \end{aligned} \right.$$

e ricordando che la forza viva è nel nostro caso

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

si trova, tenendo conto delle (9),

$$\left\{ \begin{aligned} \vartheta_1 &= Ap \cos \varphi - Bq \operatorname{sen} \varphi \\ \varphi_1 &= Cr \\ \psi_1 &= (Ap \operatorname{sen} \varphi + Bq \cos \varphi) \operatorname{sen} \vartheta + Cr \cos \vartheta. \end{aligned} \right.$$

Da queste relazioni si ricavano p, q, r in funzione delle variabili canoniche ϑ, φ, ψ, ϑ_1, φ_1, ψ_1 e si ha

$$p = \frac{1}{A}\left[\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \vartheta}(\psi_1 - \varphi_1 \cos \vartheta) + \vartheta_1 \cos \varphi\right],$$

$$q = \frac{1}{B}\left[\frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \vartheta}(\psi_1 - \varphi_1 \cos \vartheta) - \vartheta_1 \operatorname{sen} \varphi\right],$$

$$r = \frac{\varphi_1}{C}.$$

L'integrale (3) dell'energia, l'integrale (4) del momento scalare della quantità di moto e l'integrale quadratico (8), espressi in funzione delle variabili canoniche, diventano

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{A}\left[\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}(\psi_1 - \varphi_1\cos\vartheta) + \vartheta_1\cos\varphi\right]^2 + \\
&\qquad + \frac{1}{B}\left[\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}(\psi_1 - \varphi_1\cos\vartheta) - \vartheta_1\operatorname{sen}\varphi\right]^2 + \\
&\qquad + \frac{\varphi^2_1}{C} + P\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\vartheta + Q\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\vartheta + R\cos^2\vartheta = h \\
H_1 &= \psi_1 = k_1 \\
H_2 &= \left[\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}(\psi_1 - \varphi_1\cos\vartheta) + \vartheta_1\cos\varphi\right]^2 + \\
&\qquad + \left[\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}(\psi_1 - \varphi_1\cos\vartheta) - \vartheta_1\operatorname{sen}\varphi\right]^2 + \varphi^2_1 + \\
&\qquad + \frac{1}{3}(L\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\vartheta + M\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\vartheta + N\cos^2\vartheta) = k_2 .
\end{aligned}
\right.
$$

4. I tre integrali (10) sono in involuzione.

Infatti essendo $H_1 = \psi_1 = k_1$ e non figurando esplicitamente la ψ in H e H_2, risulta per due delle parentesi di Poisson

$$[HH_1] = 0, \quad [H_1H_2] = 0.$$

Come conseguenza del teorema di Poisson [3], si ha ancora

$$[HH_2] = 0,$$

poichè la funzione H_2 non contiene esplicitamente il tempo.

Osserviamo ancora che i tre integrali (10) sono risolubili rispetto alle variabili ϑ_1, φ_1, ψ_1, che risulteranno così espresse in funzione di ϑ, φ, ψ, h, k_1, k_2. Perciò introducendo una funzione incognita w tale che

$$(11)\qquad \vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial \vartheta}, \quad \varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad \psi_1 = \frac{\partial w}{\partial \psi},$$

le tre equazioni alle derivate parziali

$$
(12)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& H\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}, \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \frac{\partial w}{\partial \psi}, \vartheta, \varphi\right) = h \\
& H_1 = \frac{\partial w}{\partial \psi} = k_1 \\
& H_2\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}, \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \frac{\partial w}{\partial \psi}, \vartheta, \varphi\right) = k_2,
\end{aligned}
\right.
$$

risolubili ora rispetto a $\frac{\partial w}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial w}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial w}{\partial \psi}$, sono compatibili.

(3) C. Agostinelli, *Lezioni di Meccanica Superiore,* Edit. Ing. V. Giorgio, Torino, (1948), pag. 309-311.

Applicando quindi il teorema di Liouville [4], nel caso particolare in cui il tempo non compare esplicitamente nella funzione caratteristica e neppure in alcuno degli integrali considerati, risulta che la funzione $w(\vartheta, \varphi, \psi, h, k_1, k_2)$, soluzione del sistema (12), è esprimibile come integrale di un differenziale esatto, ossia è

$$w = \int (\vartheta_1 d\vartheta + \varphi_1 d\varphi + \psi_1 d\psi), \tag{13}$$

ove in luogo di ϑ_1, φ_1, ψ_1 si sostituiscano le corrispondenti espressioni in termini di ϑ e φ, date dalle (10).

Poichè $H\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}, \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \frac{\partial w}{\partial \psi}, \vartheta, \varphi\right)$ è la funzione caratteristica che compare nell'equazione alle derivate parziali di Hamilton-Jacobi e non contiene esplicitamente il tempo, l'equazione di Jacobi in questo caso si riduce alla forma

$$H\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}, \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \frac{\partial w}{\partial \psi}, \vartheta, \varphi\right) = h$$

ed ha la funzione $w(\vartheta, \varphi, \psi, h, k_1, k_2)$, fornita dalla (13), come integrale completo, contenente, oltre ad h, due costanti arbitrarie essenziali.

Per il teorema di Jacobi [5] gli integrali generali delle equazioni del moto sono dunque

$$\frac{\partial w}{\partial k_1} = k'_1, \quad \frac{\partial w}{\partial k_2} = k'_2, \quad t - t_0 = \frac{\partial w}{\partial h}, \tag{14}$$

$$\vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial \vartheta}, \quad \varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad \psi_1 = \frac{\partial w}{\partial \psi}, \tag{15}$$

con sei costanti arbitrarie h, k_1, k_2, t_0, k'_1, k'_2.

Le prime due delle (14) definiscono la successione delle configurazioni geometriche per le quali passa il corpo rigido durante il movimento, mentre l'ultima fornisce il tempo impiegato a raggiungere una di queste configurazioni.

Le (15) forniscono invece le componenti lagrangiane della velocità del corpo rigido.

Le (14) e (15) definiscono dunque completamente il movimento del nostro corpo rigido intorno al suo punto fisso.

(4) C. Agostinelli, loc. cit., pag. 336-342.
(5) C. Agostinelli, loc. cit., pag. 150-158.