Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Gatteschi

Sugli zeri della derivata delle funzioni di Bessel di prima specie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 43–47.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_43_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Sugli zeri della derivata delle funzioni di Bessel di prima specie.

Nota di LUIGI GATTESCHI (a Bari)

Sunto. - *Si veda il n. 1 della Nota.*

1. Per la valutazione degli zeri della derivata delle funzioni di BESSEL di prima specie $J_n'(x)$ sussiste una classica formula di MC MAHON [1], ma sfortunatamente è possibile conoscere solo l'ordine di grandezza dell'errore che si commette con l'uso di tale formula. E' invece di grande importanza ai fini dei calcoli numerici possedere una esplicita limitazione nell'errore.

A questo scopo proveremo che per l'r–esimo zero positivo $j'_{n,r}$, $(r = 1, 2, ...)$ di $J_n'(x)$, quando $0 \leq n \leq 1$, vale la formula

$$j'_{n,r} = x_{n,r} - \frac{4n^2+3}{8x_{n,r}} + \varepsilon(n, r), \qquad (r = 1, 2, ...),$$

con

$$x_{n,r} = (2r+n)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

e dove

$$|\varepsilon(n, r)| < \frac{2{,}85}{(2r+n)^3}.$$

2. Com'è noto, vale per $J_n(x)$ la seguente formula asintotica di HANKEL [2].

$$\left(\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_n(x) = \left\{ A_0(n) - \frac{A_2(n)}{(8x)^2} + \vartheta_1 \frac{A_4(n)}{(8x)^4} \right\} \cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- \left\{ \frac{A_1(n)}{8x} - \vartheta_2 \frac{A_3(n)}{(8x)^3} \right\} \operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$0 \leq \vartheta_1, \vartheta_2 \leq 1.$$

(1) J. MC MAHON, *On the roots of the Bessel and certain related functions*, « Ann. of Math. », 9, 23-30, (1894).

(2) Cfr. G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd Edition, Cambridge, 1948, pp. 205-207.

dove abbiamo posto

$$A_r(n)=\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\dots(4n^2-(2r-1)^2)}{r\,!},\quad A_0(n)=1.$$

Se ora teniamo conto della relazione

$$2J_n'(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x),$$

e poniamo

$$a_r=A_r(n-1)+A_r(n+1),\quad a_0=2,$$

si ha subito che gli zeri della $J_n'(x)$ sono dati dagli zeri della funzione

$$F_n(x)=\left\{a_0-\frac{a_2}{(8x)^2}\right\}\cos\left(x-\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-\frac{a_1}{8x}\operatorname{sen}\left(x-\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{4}\right)+R(x),$$

dove

$$|\,R(x)\,|<\left|\frac{a_4}{(8x)^4}\cos\left(x-\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left|\frac{a_3}{(8x)^3}\operatorname{sen}\left(x-\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Detti $j_{n,\,r}$ e $j'_{n,\,r}$, $(r=1,\,2,\,\dots)$, gli zeri positivi di $J_n(x)$ e di $J_n'(x)$ rispettivamente, si ha

$$(1)\qquad j_{n,\,r}<j'_{n,\,r}<j_{n,\,r+1}\,.$$

Faremo ora vedere che, quando $0\leq n\leq 1$, vale per $j'_{n,\,r}$ la migliore limitazione

$$(2r+n)\frac{\pi}{2}<j'_{n,\,r}<(2r+n)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\quad (r=1,\,2,\dots),\quad 0\leq n\leq 1.$$

Posto infatti

$$x_{n,\,r}=(2r+n)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4},$$

si ha

$$\cos\left(x_{n,\,r}-\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=0,\qquad \operatorname{sen}\left(x_{n,\,r}-\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^r,$$

e quindi

$$F_n\left(x_{n,\,r}-\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^r\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{a_0-\frac{a_2}{[8(x_{n,\,r}-\pi/4)]^2}-\frac{a_1}{8(x_{n,\,r}-\pi/4)}\right\}+$$

$$+R\left(x_{n,\,r}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$F_n(x_{n,\,r}) = (-1)^{r+1}\frac{a_1}{8x_{n,\,r}} + R(x_{n,\,r}).$$

E tenuto conto che è, per $0 \leq n \leq 1$,

$$(2) \qquad 6 \leq a_1 \leq 14, \quad -15 \leq a_2 \leq 57, \quad |\, a_3 \,| < 115, \quad |\, a_4 \,| < \frac{8325}{4},$$

si verifica facilmente che

$$F_n\left(x_{n,\,r} - \frac{\pi}{4}\right) F_n(x_{n,\,r}) < 0.$$

Risulta così provata l'esistenza di almeno uno zero di $J_n'(x)$ nell'intervallo $[(2r+n)\pi/2,\ (2r+n)\pi/2 + \pi/4]$.

Facendo ora uso della (1) e della limitazione

$$(2r+n)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < j_{n,\,r} < (2r+n)\frac{\pi}{2}, \qquad (r = 1,\ 2, \ldots),$$

trovata in un precedente lavoro [3], abbiamo che *nell'intervallo*

$$\left[(2r+n)\frac{\pi}{2},\ (2r+n)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right], \quad 0 \leq n \leq 1, \quad (r = 1,\ 2, \ldots),$$

cade uno ed un solo zero di $J_n'(x)$.

3. Posto

$$j'_{n,\,r} = x_{n,\,r} - \rho,$$

si ha, per quanto visto nel n. precedente,

$$(3) \qquad 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{4}.$$

Quest'ultima limitazione può essere notevolmente migliorata, per questo si sostituisca $x_{n,\,r} - \rho$ in $F_n(x)$ e si uguagli a zero. Tenuto conto che è

$$\cos\left(x_{n,\,r} - \rho - \frac{1}{2}n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^r \rho \cos \varepsilon,$$

$$\operatorname{sen}\left(x_{n,\,r} - \rho - \frac{1}{2}n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^r(1 - \rho \operatorname{sen} \varepsilon'),$$

[3] L. Gatteschi, *Valutazione dell'errore nella formula di Mc Mahon per gli zeri della $J_n(x)$ di Bessel nel caso $0 \leq n \leq 1$*, « Rivista di Mat. Univ. Parma », *1*, 347-362, (1950).

con

$$0 < \varepsilon,\ \varepsilon' < \frac{\pi}{4},$$

avremo

$$(-1)^r F_n(x_{n,\,r} - \rho) = \rho \cos \varepsilon \left\{ a_0 - \frac{a_2}{[8(x_{n,\,r} - \rho)]^2} \right\} -$$

$$- (1 - \rho \operatorname{sen} \varepsilon') \frac{a_1}{8(x_{n,\,r} - \rho)} + R(x_{n,\,r} - \rho) = 0,$$

da cui per le (2) e per la (3)

$$0 \leq \rho < \left[\frac{a_1}{8(x_{n,\,r} - \rho)} + | R(x_{n,\,r} - \rho) | \right] \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(2 - 57/64\pi^2)} <$$

$$< \frac{1}{(2r + n)\pi} \left[7 + \frac{8325}{8^4\pi^3} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{115}{2 \cdot 8^2 \cdot \pi^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2}(2 - 57/64\pi^2)} < \frac{5{,}525}{(2r + n)\pi}.$$

Si ha così una prima formula asintotica per $j'_{n,\,r}$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & j'_{n,\,r} = (2r + n)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \rho \\ & 0 \leq \rho < \frac{5{,}525}{(2r + n)\pi}, \quad r = 1,\ 2, \ldots, \quad (0 \leq n \leq 1). \end{aligned} \right.$$

Volendo far intervenire un altro termine nella formula non c'è che da ripetere il precedente procedimento.

Più precisamente basta osservare che può scriversi

$$(-1)^r F_n(x_{n,\,r} - \rho) = \left\{ \rho - \frac{\rho^3}{3!} \cos \varphi \right\} \left\{ a_0 - \frac{a_2}{[8(x_{n,\,r} - \rho)]^2} \right\} -$$

$$- \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{2!} \cos \varphi' \right\} \frac{a_1}{8(x_{n,\,r} - \rho)} + R(x_{n,\,r} - \rho),$$

$$0 \leq \varphi,\ \varphi' \leq 5{,}525/(2r + n)\pi.$$

E da questa uguagliando a zero e risolvendo rispetto a ρ si ha

$$\rho = \frac{a_1}{8 a_0 x_{n,\,r}} + \varepsilon(n,\ r),$$

con

$$\varepsilon(n,\ r) = \frac{\rho^3}{3!} \cos \varphi - \frac{\rho^3 a_2}{3!\, a_0 [8(x_{n,\,r} - \rho)]^2} + \frac{\rho a_2}{a_0 [8(x_{n,\,r} - \rho)]^2} +$$

$$+\frac{\rho a_1}{8a_0x_{n,r}(x_{n,r}-\rho)}-\frac{\rho^2a_1\cos\varphi'}{2\,!\,8x_{n,r}a_0}-\frac{\rho^3a_1\cos\varphi'}{2\,!\,8a_0x_{n,r}(x_{n,r}-\rho)}.$$

Tenuto conto delle limitazioni trovate per ρ e delle (2) si ha, con calcoli elementari ma laboriosi

$$|\,\varepsilon(n,\ r)\,|<\frac{2{,}85}{(2r+n)^3}\,. \tag{6}$$

E quindi dalla (4) e dalla (5), essendo $a_1=2(4n^2+3)$, $a_0=2$, otteniamo

$$\boxed{j'_{n,\,r}=x_{n,\,r}-\frac{4n^2+3}{8x_{n,\,r}}+\varepsilon(n,\ r)}\,,\qquad (r=1,\ 2,\ldots) \tag{7}$$

$$x_{n,\,r}=(2r+n)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\,,$$

dove per $\varepsilon(n,\ r)$ vale la limitazione (6).