Bollettino
Unione Matematica Italiana

Tino Zeuli

Propagazione di oscillazioni magneto-idrodinamiche in un fluido elettricamente conduttore che riempie un semispazio.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 23–31.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_23_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Propagazione di oscillazioni magneto-idrodinamiche in un fluido elettricamente conduttore che riempie un semispazio.

Nota di TINO ZEULI (a Torino)

Sunto. - *È dato dal contenuto del n. 1.*

1. In questa nota mi occupo di un caso particolare notevole di propagazione di oscillazioni magneto-idrodinamiche in una massa fluida omogenéa elettricamente conduttrice che riempie un semispazio, tenendo conto anche della viscosità.

Queste questioni, che hanno origine da recenti studi del prof. ALFVEN di Stoccolma [1], hanno come si sa molta importanza per le applicazioni alla cosmogonia.

[1] H. ALFVEN, *Cosmical Electrodynamics*, (Oxford, at the Clarendon Press, 1953).

Ora ho osservato che le equazioni della magneto-idrodinamica relative ad un fluido omogeneo elettricamente conduttore, di conduttività elettrica σ e permeabilità magnetica μ costanti, che riempie un semispazio, soggetto ad un' azione gravitazionale il cui potenziale si suppone proporzionale alla distanza dal piano $z=0$, ed inoltre ad un campo magnetico uniforme, $\vec{H}_0$, comunque inclinato rispetto al piano limite, ammettono una soluzione stazionaria corrispondente ad un moto uniforme del fluido con velocità, $\vec{v}_0$, costante, perpendicolare ad $\vec{H}_0$ e parallela al piano $z=0$, in cui la densità ρ del fluido si mantiene costante, la pressione varia proporzionalmente alla quota z ed il campo elettrico è espresso $\vec{E}=\frac{\mu}{c}\vec{H}_0 \wedge \vec{v}_0$.

Come conseguenza di una perturbazione magneto-idrodinamica sul piano $z=0$, periodica rispetto al tempo, ho studiato lo propagazione di oscillazioni magneto-idrodinamiche nell'interno della massa fluida e nell'intorno della soluzione stazionaria considerata, ammettendo piccole variazioni del campo magnetico, del campo elettrico, della velocità, della densità, della pressione e del potenziale gravitazionale, con incrementi dipendenti solo dalla coordinata z e dal tempo.

Dopo aver stabilito le equazioni differenziali che reggono il fenomeno nel caso considerato (nn. 2-4), risolvo completamente la questione quando il campo magnetico iniziale, $\vec{H}_0$, è diretto perpendicolarmente al piano limite, determinando delle soluzioni corrispondenti alla sovrapposizione di onde magneto-idrodinamiche periodiche rispetto al tempo propagantesi nella direzione perpendicolare al piano $z=0$, che vanno smorzandosi col crescere della distanza da questo piano.

2. Le equazioni differenziali relative al problema in esame sono anzitutto le equazioni di MAXWELL

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \operatorname{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

ove

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \vec{j}=\sigma\left[\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{B}\right]$$

($\sigma=$ conduttività elettrica, $\vec{v}=$ velocità del fluido); in esse, ritenendo il fluido considerato omogeneo e normale, potremo porre

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B}=\mu\vec{H}.$$

Ad esse vanno aggiunte: l'equazione $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, che porge

$$(\mathrm{I}_3) \qquad \operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

l'equazione di continuità

$$(\mathrm{I}_4) \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

(ρ = densità del fluido) e l'equazione fondamentale della magneto-idrodinamica:

$$(\mathrm{I}_5) \qquad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{B} - \operatorname{grad} p + \rho \operatorname{grad} U + \nu \left(\frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \Delta_2 \vec{v} \right),$$

(p = pressione, U = potenziale gravitazionale, ν = coefficiente di viscosità).

Supporremo di aver scelto come piano $z = 0$ il piano che delimita il semispazio considerato ($z > 0$), ammetteremo che il piano (x, z) sia parallelo al campo magnetico uniforme, $\vec{H}_0$, in cui il fluido è immerso ($\vec{H}_0 = H_0' \vec{I} + H_0'' \vec{K}$), e che la velocità $\vec{v}_0$ nel piano $z = 0$ abbia la direzione dell'asse y, cioè sia perpendicolare al campo $\vec{H}_0$, ($\vec{v}_0 = v_0 \vec{J}$) (²). Supporremo inoltre che gli elementi idrodinamici siano funzioni soltanto di z e di t.

3. Indicando con g_0 l'accelerazione di gravità in prossimità della superficie $z = 0$ e tenendo presente che per $z = 0$ è $p = 0$, si rileva subito per il problema la soluzione stazionaria:

$$\vec{H} = \vec{H}_0, \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 = v_0 \vec{J}, \qquad U = U_0 = g_0 z,$$
$$\rho = \rho_0 = \text{cost.}, \qquad p = p_0 = \rho_0 g_0 z, \qquad \vec{E} = \frac{\mu}{c} v_0 \vec{H}_0 \wedge \vec{J} = \frac{\mu v_0}{c} H_0' \vec{K}.$$

4. Per la ricerca di soluzioni non stazionarie poniamo ora

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}, \qquad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{\mathcal{E}}, \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{w},$$
$$\rho = \rho_0 + \xi, \qquad p = p_0 + \eta, \qquad U = U_0 + \zeta,$$

con $\vec{h}$, $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{w}$, ξ, η, ζ quantità infinitesime che considereremo del 1° ordine e tali da poter trascurare i termini di ordine superiore al 1°. Le equazioni (I) porgono allora

(²) Queste condizioni si possono pensare realizzate, per una regione limitata, sulla superficie di una stella ruotante attorno ad un suo asse.

$$
\text{(II)}\quad \begin{cases}
\operatorname{rot}\vec{h} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t}, \\[2mm]
\operatorname{rot}\vec{\mathcal{E}} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \\[2mm]
\vec{j} = \sigma\left[\vec{\mathcal{E}} + \dfrac{\mu}{c}(\vec{w}\wedge\vec{H}_0 + \vec{v}_0\wedge\vec{h})\right], \\[2mm]
\operatorname{div}\vec{h} = 0, \\[2mm]
\rho_0\dfrac{d\vec{w}}{dt} = \dfrac{\mu}{c}\vec{j}\wedge\vec{H}_0 + \xi g_0\vec{K} + \nu\Delta_2 w - \operatorname{grad}\left(\eta - \rho_0\zeta - \dfrac{1}{3}\nu\operatorname{div}\vec{w}\right), \\[2mm]
\dfrac{d\xi}{dt} + \rho_0\operatorname{div}\vec{w} = 0.
\end{cases}
$$

Nella nostra ipotesi, che le incognite siano funzioni soltanto di z e t, si ha subito

$$
\operatorname{div}\vec{h} = \frac{\partial h_z}{\partial z}, \qquad \operatorname{div}\vec{w} = \frac{\partial w_z}{\partial z}, \qquad \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\partial\vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{w}}{\partial y}v_0 = \frac{\partial\vec{w}}{\partial t},
$$

$$
\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t}, \qquad \Delta_2\vec{w} = \frac{\partial^2\vec{w}}{\partial z^2}
$$

e quindi le prime quattro delle (II), eliminando la corrente di conduzione $\vec{j}$ colla 3ª, porgono

$$
(\mathrm{III}_1)\qquad \begin{cases}
\operatorname{rot}\vec{h} = \dfrac{4\pi}{c}\sigma\left[\vec{\mathcal{E}} + \dfrac{\mu}{c}(\vec{w}\wedge\vec{H}_0 + \vec{v}_0\wedge\vec{h})\right] + \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t}, \\[2mm]
\operatorname{rot}\vec{\mathcal{E}} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \\[2mm]
h_z = 0.
\end{cases}
$$

La 5ª delle (II), poi, si scinde in due, ed, eliminando $\vec{j}$ per mezzo della 1ª delle (II), si ha

$$
(\mathrm{III}_2)\qquad \begin{cases}
\rho_0\dfrac{\partial\vec{w}}{\partial t} = \dfrac{\mu}{4\pi}\left(\operatorname{rot}\vec{h} - \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t}\right)\wedge\vec{H}_0 + \xi g_0\vec{K} + \nu\dfrac{\partial^2\vec{w}}{\partial z^2}, \\[2mm]
\eta - \rho_0\zeta - \dfrac{1}{3}\nu\dfrac{\partial w_z}{\partial z} = \text{cost.}, \\[2mm]
\dfrac{\partial\xi}{\partial t} + \rho_0\dfrac{\partial w_z}{\partial z} = 0;
\end{cases}
$$

la seconda di queste equazioni fornisce l'incremento, η, della pressione, p.

Proiettando sugli assi ci si riduce a risolvere il sistema

$$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{\partial h_y}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}\sigma\left[\mathcal{E}_x+\frac{\mu}{c}H_0''w_y\right]+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial t},\\
&\frac{\partial h_x}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}\sigma\left[\mathcal{E}_y+\frac{\mu}{c}(H_0'w_z-H_0''w_x)\right]+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial t},\\
&0=\frac{4\pi}{c}\sigma\left[\mathcal{E}_z-\frac{\mu}{c}(H_0'w_y+v_0h_x)\right]+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial t},\\
&\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial z}=\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_x}{\partial t},\\
&\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_y}{\partial t},\\
&\rho_0\frac{\partial w_x}{\partial t}=\frac{\mu}{4\pi}H_0''\frac{\partial h_x}{\partial z}-\frac{\mu\varepsilon}{4\pi c}H_0''\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial t}+\nu\frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2},\\
&\rho_0\frac{\partial w_y}{\partial t}=\frac{\mu}{4\pi}H_0''\frac{\partial h_y}{\partial z}-\frac{\mu\varepsilon}{4\pi c}\left(H_0'\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial t}-H_0''\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial t}\right)+\nu\frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2},\\
&\rho_0\frac{\partial w_z}{\partial t}=-\frac{\mu}{4\pi}H_0'\frac{\partial h_x}{\partial z}+\frac{\mu\varepsilon}{4\pi c}H_0'\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial t}+g_0\xi+\nu\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial\xi}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial w_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right.$$

Eliminando $\mathcal{E}_x$ ed $\mathcal{E}_y$ abbiamo il sistema:

$$\text{(IV)}\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-4\pi\frac{\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)h_y+4\pi\frac{\mu\sigma}{c^2}H_0''\frac{\partial w_y}{\partial z}=0,\\
&\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-4\pi\frac{\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)h_x+4\pi\frac{\mu\sigma}{c^2}\left(H_0''\frac{\partial w_x}{\partial z}-H_0'\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)=0,\\
&\mathcal{E}_z=\frac{\mu}{c}(H_0'w_y+v_0h_x)-\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial t},\\
&\frac{\mu}{4\pi}H_0''\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h_x+\left(\nu\frac{\partial^3}{\partial z^3}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}\right)w_x=0,\\
&\frac{\mu}{4\pi}H_0''\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h_y+\left(\nu\frac{\partial^3}{\partial z^3}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}\right)w_y-\frac{\mu\varepsilon}{4\pi c}H_0'\frac{\partial^2\mathcal{E}_z}{\partial z\partial t}=0,\\
&-\frac{\mu}{4\pi}H_0'\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h_x+\left(\nu\frac{\partial^3}{\partial z^3}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}\right)w_z+g_0\frac{\partial\xi}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial\xi}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial w_z}{\partial z}=0;
\end{aligned}\right.$$

e si hanno sette equazioni nelle sette incognite h_x, h_y, w_x, w_y, w_z, ξ, $\mathcal{E}_z$.

La 2ª, 4ª, 6ª e 7ª delle equazioni (IV) contengono solo le incognite h_x, w_x, w_z, ξ, le rimanenti tre definiscono le altre incognite per mezzo di h_x: basterà quindi integrare il sistema delle quattro equazioni in h_x, w_x, w_z, ξ.

Cerchiamo per questo delle soluzioni della forma:

$$(1)\qquad \begin{cases} h_x = A_n e^{in\omega t - \alpha_n^2 z}, & w_x = B_n e^{in\omega t - \alpha_n^2 z}, \\ w_z = C_n e^{in\omega t - \alpha_n^2 z}, & \xi = D_n e^{in\omega t - \alpha_n^2 z}, \\ w_y = M_n e^{in\omega t - \alpha_n^2 z}, & h_y = N_n e^{in\omega t - \alpha_n^2 z}, \quad \mathcal{E}_z = P_n e^{in\omega t - \alpha_n^2 z}, \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

con ω costante reale ed α_n^2 costante a parte reale positiva perchè h_x, w_x, ... si annullino per $z \to \infty$.

Otterremo dalle quattro equazioni accennate:

$$(\mathrm{V})\qquad \begin{cases} \left(\alpha_n^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2 - 4\pi i \frac{\mu\sigma}{c^2} n\omega\right) A_n + 4\pi \frac{\mu\sigma}{c^2}\left(-H_0''\alpha_n^2 B_n + H_0'\alpha_n^2 C_n\right) = 0, \\ \frac{\mu}{4\pi} H_0'' \left(\alpha_n^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2\right) A_n + \left(-\nu\alpha_n^4 + in\omega\rho_0\right)\alpha_n^2 B_n = 0, \\ -\frac{\mu}{4\pi} H_0' \left(\alpha_n^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2\right) A_n + \left(-\nu\alpha_n^4 + in\omega\rho_0\right)\alpha_n^2 C_n - g_0\alpha_n^2 D_n = 0, \\ -\rho_0\alpha_n^2 C_n + in\omega D_n = 0, \end{cases}$$

e ne segue, escludendo il caso $\alpha_n^2 = 0$ e ponendo, per brevità,

$$(2)\qquad \Omega^2 = \alpha_n^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2,$$

l'equazione in α_n^2:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \Omega^2 - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} in\omega, & -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} H_0'', & \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} H_0', & 0 \\ \frac{\mu}{4\pi}\Omega^2 H_0'', & -\nu\alpha_n^4 + in\omega\rho_0, & 0, & 0 \\ -\frac{\mu}{4\pi}\Omega^2 H_0', & 0, & -\nu\alpha_n^4 + in\omega\rho_0, & -g_0\alpha_n^2 \\ 0, & 0, & -\rho_0, & in\omega \end{vmatrix} = 0.$$

5. Prendiamo ora in esame il *caso in cui* $H_0' = 0$: in questo caso la (3) si scinde nelle due equazioni

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \Omega^2 - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} in\omega, & -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} H_0'' \\ \frac{\mu}{4\pi}\Omega^2 H_0'', & -\nu\alpha_n^4 + in\omega\rho_0 \end{vmatrix} = 0$$

ed

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} -\nu\alpha_n^4 + in\omega\rho_0, & -g_0\alpha_n^2 \\ -\rho_0, & in\omega \end{vmatrix} = 0.$$

La (5) si scrive

$$\alpha_n^4 - i\frac{\rho_0 g_0}{n\omega\nu}\alpha_n^2 - i\frac{n\omega}{\nu}\rho_0 = 0$$

ed ha una sola radice $\alpha_n'^2$ con parte reale positiva: infatti si ha

$$\alpha_n^2 = \frac{1}{2}\left\{ i\frac{\rho_0 g_0}{n\omega\nu} \pm \left(-\frac{\rho_0^2 g_0^2}{n^2\omega^2\nu^2} + 4i\frac{n\omega}{\nu}\rho_0 \right)^{1/2} \right\}$$

e, posto

$$R_0 = \sqrt{\left(\frac{\rho_0 g_0}{n\omega\nu}\right)^4 + 16\left(\frac{n\omega}{\nu}\rho_0\right)^2},$$

$$\cos\varphi_0 = -\frac{\rho_0^2 g_0^2}{n^2\omega^2\nu^2 R_0}, \qquad \sin\varphi_0 = \frac{4n\omega\rho_0}{\nu R_0},$$

si ha

$$-\frac{\rho_0^2 g_0^2}{n^2\omega^2\nu^2} + 4i\frac{n\omega}{\nu}\rho_0 = R_0 e^{i\varphi_0}, \qquad \text{con } \frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi,$$

$$\left(-\frac{\rho_0^2 g_0^2}{n^2\omega^2\nu^2} + 4i\frac{n\omega}{\nu}\rho_0\right)^{1/2} = \pm\sqrt{R_0}\, e^{i\varphi/2}, \qquad \text{con } \frac{\pi}{4} < \frac{\varphi_0}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Si ha quindi la radice reale positiva:

$$\alpha_n'^2 = \frac{1}{2}\left\{ i\frac{\rho_0 g_0}{n\omega\nu} + \sqrt{R_0}\, e^{i\varphi_0/2} \right\}.$$

La (4), invece, ricordando la posizione (2), diventa

$$\alpha_n^8 + \alpha_n^4\left[\frac{\mu\varepsilon}{c^2}n^2\omega^2 - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}in\omega - i\frac{n\omega\rho_0}{\nu} - \frac{\mu^2\sigma}{c^2\nu}H_0''^2\right] -$$

$$- in^2\omega^2\rho_0\frac{\mu}{c^2\nu}(n\omega\varepsilon - 4i\pi\sigma) - \frac{\mu^3\varepsilon\sigma}{c^4\nu}H_0''^2 n^2\omega^2 = 0,$$

che ammette due radici della forma

$$[\alpha_n^{(1)}]^4 = R_1 e^{i\varphi_1}, \qquad [\alpha_n^{(2)}]^4 = R_2 e^{i\varphi_2}$$

e quindi

$$[\alpha_n^{(1)}]^2 = \pm\sqrt{R_1}\, e^{i\varphi_1/2}, \qquad [\alpha_n^{(2)}]^2 = \pm\sqrt{R_2}\, e^{i\varphi_2/2};$$

si hanno dunque altre due radici con parte reale positiva che indicheremo con $\alpha_n''^2$, $\alpha_n'''^2$.

Le equazioni (V) che definiscono i coefficienti A_n, B_n, C_n, D_n si riducono ora alle seguenti

$$\begin{cases} \left(\alpha_n{}^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2 - 4\pi i \frac{\mu\sigma}{c^2} n\omega\right) A_n - 4\pi \frac{\mu\sigma}{c^2} H_0{}''\alpha_n{}^2 B_n = 0, \\ \frac{\mu}{4\pi} H_0{}''\left(\alpha_n{}^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2\right) A_n + (-\nu\alpha_n{}^4 + in\omega\rho_0)\alpha_n{}^2 B_n = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\nu\alpha_n{}^4 + in\omega\rho_0)\alpha_n{}^2 C_n - g_0\alpha_n{}^2 D_n = 0, \\ -\rho_0\alpha_n{}^2 C_n + in\omega D_n = 0. \end{cases}$$

Queste ultime danno dunque

$$D_n = \frac{\rho_0}{in\omega}\alpha_n{}'^2 C_n, \tag{6}$$

con C_n costante arbitraria.

Le prime due, invece, porgono

$$B_n{}'' = \beta_n{}'' A_n{}'', \qquad B_n{}''' = \beta_n{}''' A_n{}''', \tag{7}$$

con $A_n{}''$ ed $A_n{}'''$ costanti arbitrarie, ove si è posto per semplicità

$$\beta_n{}'' = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma H_0{}''\alpha_n{}''^2}\left(\alpha_n{}''^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2 - 4\pi i \frac{\mu\sigma}{c^2} n\omega\right),$$

$$\beta_n{}''' = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma H_0{}''\alpha_n{}'''^2}\left(\alpha_n{}'''^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2 - 4\pi i \frac{\mu\sigma}{c^2} n\omega\right).$$

Quindi avremo

$$\begin{cases} h_x{}^{(n)} = (A_n{}'' e^{-\alpha_n{}''^2 z} + A_n{}''' e^{-\alpha_n{}'''^2 z}) e^{in\omega t}, \\ w_x{}^{(n)} = (\beta_n{}'' A_n{}'' e^{-\alpha_n{}''^2 z} + \beta_n{}''' A_n{}''' e^{-\alpha_n{}'''^2 z}) e^{in\omega t}, \\ w_z{}^{(n)} = C_n e^{-\alpha_n{}'^2 z + in\omega t}, \qquad \zeta^{(n)} = \frac{\rho_0}{in\omega}\alpha_n{}'^2 C_n e^{-\alpha_n{}'^2 z + in\omega t}. \end{cases} \tag{8}$$

6. Prendiamo ora in considerazione le rimanenti equazioni 1ª, 3ª, 5ª del sistema (IV): colle posizioni (1), nella nostra ipotesi, esse porgono

$$\begin{cases} \left(\alpha_n{}^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2 - 4\pi \frac{\mu\sigma}{c^2} in\omega\right) N_n - 4\pi \frac{\mu\sigma}{c^2} H_0{}''\alpha_n{}^2 M_n = 0, \\ P_n - \frac{\mu}{c} v_0 A_n + \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} in\omega P_n = 0, \\ \frac{\mu}{4\pi} H_0{}''\left(\alpha_n{}^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2\right) N_n + (-\nu\alpha_n{}^6 + \rho_0 in\omega\alpha_n{}^2) M_n = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Dalla 2ª equazione segue

$$P_n = \frac{\mu v_0}{c\left(1 + in\omega \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}\right)} A_n$$

e quindi avremo

$$(10)\quad \mathcal{E}_z^{(n)} = \frac{\mu v_0}{c\left(1+in\omega \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}\right)} (A_n' e^{-\alpha_n'^2 z} + A_n'' e^{-\alpha_n''^2 z} + A_n''' e^{-\alpha_n'''^2 z}) e^{in\omega t},$$

potendo α_n^2 ricevere i valori $\alpha_n'^2$, $\alpha_n''^2$, $\alpha_n'''^2$ ed A_n, in corrispondenza i valori A_n', A_n'', A_n'''.

Dalle altre due equazioni (9) segue

$$\begin{vmatrix} \alpha_n^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2 - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} in\omega , & -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} H_0'' \\ \frac{\mu}{4\pi} H_0'' \left(\alpha_n^4 + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} n^2\omega^2\right) , & -\nu\alpha_n^4 + in\omega\rho_0 \end{vmatrix} = 0;$$

ritroviamo quindi la (4) che ammette, come sappiamo, le radici con parte reale positiva $\alpha_n''^2$, $\alpha_n'''^2$. Quindi sarà

$$M_n'' = \beta_n'' N_n'', \qquad M_n''' = \beta_n''' N_n''',$$

con N_n'', N_n''' costanti arbitrarie. Ne segue

$$(11)\quad \begin{cases} h_y^{(n)} = N_n'' e^{in\omega t - \alpha_n''^2 z} + N_n''' e^{in\omega t - \alpha_n'''^2 z}, \\ w_y^{(n)} = \beta_n'' N_n'' e^{in\omega t - \alpha_n''^2 z} + \beta''' N_n''' e^{in\omega t - \alpha_n''^2 z}. \end{cases}$$

7. La soluzione (8), (10), (11) del nostro problema, che corrisponde ad una sovrapposizione di onde magneto-idrodinamiche, periodiche rispetto al tempo, propagantesi nella direzione perpendicolare al piano limite $z = 0$ e che vanno smorzandosi col crescere della distanza da questo piano, contiene cinque costanti arbitrarie, A_n'', A_n''', C_n, N_n'', N_n''', che si determinano assegnando i valori di $h_x^{(n)}$, $h_y^{(n)}$, $w_x^{(n)}$, $w_y^{(n)}$, $w_z^{(n)}$ nel piano limite come funzioni periodiche del tempo, di periodo $2\pi/\omega$. Così, ad es., supposta la perturbazione magneto-idrodinamica rappresentabile in serie di Fourier,

$$(h_x)_{z=0} = \Sigma_n a_n e^{in\omega t}, \qquad (w_x)_{z=0} = \Sigma_n b_n e^{in\omega t}, \qquad \text{ecc.},$$

con a_n, b_n, ecc., costanti complesse note, si avrà per le (8), ecc.,

$$A_n'' + A_n''' = a_n, \qquad \beta_n'' A_n'' + \beta_n''' A_n''' = b_n, \qquad \text{ecc.},$$

da cui seguono A_n'', A_n''', ecc., e si determinerà così la perturbazione magnetica in tutto il semispazio $z > 0$.