BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CATALDO AGOSTINELLI

Sulla compatibilità di una forma ellissoidale a tre assi per una massa fluida cosmica rotante, elettricamente conduttrice, immersa in un campo magnetico uniforme.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 17–23.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_17_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Sulla compatibilità di una forma ellissoidale a tre assi per una massa fluida cosmica rotante, elettricamente conduttrice, immersa in un campo magnetico uniforme.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino)

Sunto. - *Come nel n. 1.*

1. È ben nota l'importanza che hanno assunto recentemente gli studi relativi all'influenza dei fenomeni elettromagnetici sul movimento di masse fluide di dimensioni cosmiche elettricamente conduttrici, immerse in un campo magnetico, o dotate di un campo magnetico proprio, studi propugnati sopratutto dal Prof. H. ALFVÉN di Stoccolma (1). Però essi sono stati finora limitati al solo caso piano, al caso cioè in cui tutti gli elementi del campo e del moto dipendono da una sola coordinata cartesiana, oltre che dal tempo. Ma questo è evidentemente un caso limite che non rispecchia le reali condizioni di una massa fluida cosmica come una nebulosa sferoidica, o una stella, dotata di un moto di rotazione, e in conseguenza di un campo magnetico proprio, in cui si manifestano oscillazioni del campo e pulsazioni di forma (come ad es. nel Sole).

Guidato da queste considerazioni ho iniziato ultimamente alcuni studi sulla propagazione di onde cosidette *magneto idrodinamiche* in una massa fluida omogenea elettricamente conduttrice, uniformemente rotante intorno ad un asse. Innanzitutto mi sono proposto di determinare, delle equazioni della magneto idrodinamica, delle *soluzioni stazionarie*, in cui cioè gli elementi del campo e del moto dipendono solo dal posto, ma sono invariabili col tempo, caratterizzando in particolare delle soluzioni in cui la massa fluida rotante (supposta incompressibile), con campo magnetico assiale uniforme, soggetta inoltre alla propria gravitazione, assume la forma di un ellissoide rotondo con campo magnetico trasversale indotto proporzionale alla velocità delle particelle fluide (2). Successivamente ho studiato le oscillazioni magneto idrodinamiche

(1) H. ALFVEN, *Cosmical Electrodynamics,* Oxford at the Clarendon Press, 1953. IDEM, *Electromagnetic Phenomena in the Motion of Gaseous Masses of Cosmical Dimensions,* « Problems of Cosmical Aerodinamics », Central Air Documents Office - U. B. Building. Dayton 2, Ohio, 1951.

(2) C. AGOSTINELLI, *Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto idrodinamica interessanti la Cosmogonia.* « Rendiconti dell' Acc. Naz. dei Lincei », Serie VIII, vol. XVII, - fasc. 5 - Nov. 1954.

nell'intorno delle soluzioni ultime a cui ho accennato, ottenendo due successioni di soluzioni corrispondenti ad onde sinusoidali rispetto al tempo che si propagano nella direzione dell'asse di rotazione ([3]). Infine ho considerato il caso in cui la massa fluida è soggetta ad un campo magnetico avente, oltre la componente assiale, una componente equatoriale rotante uniformemente con la stessa velocità angolare di rotazione della massa fluida ([4]) caso che interessa particolarmente il Sole il quale, oltre a un campo magnetico assiale, è dotato di forti campi magnetici dovuti alle macchie solari, rotanti col Sole.

In questa nota dimostro ora come per una massa fluida cosmica omogenea, elettricamente conduttrice, immersa in un campo magnetico uniforme e soggetta alla propria gravitazione, è compatibile una forma ellissoidale a tre assi, invariabile rispetto a un osservatore fisso, in cui le particelle fluide hanno un moto ellittico intorno allo stesso asse ([6]).

2. Lo studio dei fenomeni magneto idrodinamici in una massa fluida elettricamente conduttrice, che per semplicità supponiamo omogenea e incompressibile, di densità costante ρ_0, con permeabilità magnetica μ e conduttività elettrica σ pure costanti, si riduce alla considerazione delle equazioni ([5])

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) + k_0^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p - \operatorname{grad} U - \frac{1}{\lambda_0^2}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{3}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{4}$$

ove si è posto

$$k_0^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}, \qquad \lambda_0^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\mu}, \tag{5}$$

([3]) C. Agostinelli, *Oscillazioni magneto idrodinamiche in una massa fluida rotante, di dimensioni cosmiche, di forma ellissoidale rotonda*, « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », vol. 89, 1954-55.

([4]) Idem, *Oscillazioni magneto idrodinamiche in una massa fluida cosmica uniformemente rotante, dotata di un campo magnetico assiale e di un campo magnetico equatoriale rotante*, idem, idem.

([5]) Cfr.: C. Agostinelli, *loco citato* in ([3]).

([6]) Per quanto riguarda il movimento di una massa liquida ellissoidale a tre assi, gravitante e rotante, si veda anche: C. Agostinelli, *Configurazioni di equilibrio di una massa liquida omogenea attratta da più centri lontani con la legge di* Newton. « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », Serie II, Tomo II, P. I. (1943-44).

essendo $\boldsymbol{H}$ l'intensità del campo magnetico, $\boldsymbol{v}$ la velocità delle particelle fluide, p la pressione, c la velocità della luce nel vuoto, U il potenziale delle forze di mutua attrazione newtoniane.

Detto O il centro della massa fluida, che supponiamo mobile di moto uniforme con velocità costante $\boldsymbol{v}_0$, indicando con P un punto della stessa massa fluida, cercheremo soluzioni delle equazioni precedenti in cui $\boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{H}$ siano della forma

$$(6) \qquad \boldsymbol{v} = \alpha(P - O) + \boldsymbol{v}_0, \qquad\qquad (6') \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \gamma_0\lambda_0(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0),$$

ove $\boldsymbol{H}_0$ è l'intensità di un campo magnetico uniforme, γ_0 è una costante scalare arbitraria, ed α è una *omografia vettoriale* che supponiamo somma di una *assiale* $\omega\wedge$, con ω vettore costante, avente la stessa direzione di $\boldsymbol{H}_0$, e di una *dilatazione* (costante) ψ, cioè

$$(7) \qquad \alpha = \omega\wedge + \psi.$$

Riferiremo la massa fluida ad una terna di assi $O(xyz)$ di versori $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$, con l'origine nel centro O, di direzione invariabile e l'asse Oz coincidente con l'asse di rotazione. Sarà allora

$$(8) \qquad \boldsymbol{H}_0 = H_0\boldsymbol{K}, \qquad \omega = \omega\boldsymbol{K}.$$

Supporremo inoltre che la dilatazione ψ operi parallelamente al piano xy, che cioè sia $\psi\boldsymbol{K} = 0$. Ne segue che sarà anche $\alpha\boldsymbol{K} = 0$, $\alpha\boldsymbol{H}_0 = 0$.

Le condizioni (3) e (4) risultano entrambe identicamente verificate se l'*invariante primo* di ψ è nullo:

$$(9) \qquad I_1\psi = 0.$$

Ciò premesso dalle (6) e (6') si ricava

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\alpha\frac{dO}{dt} = -\alpha\boldsymbol{v}_0, \qquad \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} = \alpha, \qquad \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} = \gamma_0\lambda_0\frac{d\boldsymbol{v}}{dP},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \gamma_0\lambda_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\gamma_0\lambda_0 \cdot \alpha\boldsymbol{v}_0,$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{v}) = \left(\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right)\boldsymbol{H} - \left(\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\right)\boldsymbol{v} =$$

$$= \frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{v} - \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{H} = \gamma_0\lambda_0 \cdot \alpha\boldsymbol{v}_0,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \gamma_0\lambda_0\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 2\gamma_0\lambda_0\omega, \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0.$$

e pertanto l'equazione (1) è identicamente verificata.

Si ha inoltre

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(v - v_0) = \alpha^2(P - O)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} = 2\gamma_0\lambda_0\omega \wedge [\boldsymbol{H}_0 + \gamma_0\lambda_0(v - v_0)] = 2\gamma_0{}^2\lambda_0{}^2(\omega\wedge)\alpha(P - O),$$

e l'equazione (2) diventa

$$[\alpha^2 - 2\gamma_0{}^2(\omega\wedge)\alpha](P - O) = \operatorname{grad}\left(U - \frac{p}{\rho_0}\right). \tag{10}$$

Questa equazione mostra che l'omografia $\alpha^2 - 2\gamma_0{}^2(\omega\wedge)\alpha$ deve essere una dilatazione, come si riconosce facilmente prendendo il rotore di ambo i membri; ma si ha

$$\alpha^2 - 2\gamma_0{}^2(\omega\wedge)\alpha \equiv (1 - 2\gamma_0{}^2)[(\omega\wedge)^2 + (\omega\wedge)\psi] + \psi(\omega\wedge),$$

perciò deve essere

$$(\omega\wedge)\psi + \psi(\omega\wedge) = 0. \tag{11}$$

La dilatazione ψ deve dunque verificare le condizioni (9) e (11), e sarà inoltre $\psi \boldsymbol{K} = 0$. Verificate queste condizioni avremo

$$\alpha^2 = (\omega\wedge)^2 + \psi^2.$$

Dopo ciò dalla (10), moltiplicando scalarmente per dP, si ricava

$$\{(\omega\wedge)^2 + \psi^2 - 2\gamma_0[(\omega\wedge)^2 + (\omega\wedge)\psi]\}(P - O) \times dP = d\left(U - \frac{p}{\rho_0}\right)$$

e integrando si ha

$$\frac{1}{2}\{(\omega\wedge)^2 + \psi^2 - 2\gamma_0{}^2[(\omega\wedge)^2 + (\omega\wedge)\psi]\}(P - O) \times (P - O) = U - \frac{p}{\rho_0} + \text{cost.} \tag{12}$$

3. Supponiamo ora che la superficie che limita la massa liquida sia un ellissoide i cui assi, di direzioni invariabili, coincidono con gli assi coordinati $O(xyz)$. Essendo ν una dilatazione costante, l'equazione di questa superficie sarà della forma

$$F \equiv (P - O) \times \nu(P - O) - 1 = 0 \tag{13}$$

e nei punti di essa dovremo avere

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{grad}_P F \times v = 0.$$

Ma

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2v_0 \times \nu(P - O), \quad \operatorname{grad}_P F = 2\nu(P - O),$$

ne segue

$$\nu(P - O) \times \alpha(P - O) = 0, \quad \text{ovvero:} \quad (P - O) \times \nu\alpha(P - O) = 0.$$

Quest'ultima relazione deve essere soddisfatta qualunque sia la direzione del vettore $P - O$. Essa esprime pertanto che l'omografia $\nu\alpha = \nu(\omega\wedge + \psi)$ deve essere *assiale*, e si ha pertanto la condizione

$$\nu(\omega\wedge + \psi) + (-\omega\wedge + \psi)\nu = 0. \tag{14}$$

Se chiamiamo a, b, c i semiassi dell'ellissoide ($a > b > c$), i cui versori sono $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$, tenendo conto della (13) avremo

$$\nu\boldsymbol{I} = \frac{1}{a^2}\boldsymbol{I}, \qquad \nu\boldsymbol{J} = \frac{1}{b^2}\boldsymbol{J}, \qquad \nu\boldsymbol{K} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{K}.$$

Ponendo inoltre

$$\begin{aligned} \psi\boldsymbol{I} &= f_{11}\boldsymbol{I} + f_{12}\boldsymbol{J} + f_{13}\boldsymbol{K} \\ \psi\boldsymbol{J} &= f_{12}\boldsymbol{I} + f_{22}\boldsymbol{J} + f_{23}\boldsymbol{K} \\ \psi\boldsymbol{K} &= f_{13}\boldsymbol{I} + f_{23}\boldsymbol{J} + f_{33}\boldsymbol{K}. \end{aligned}$$

si ha che la condizione (14) richiede che tutti gli elementi f_{ij} della dilatazione ψ siano nulli ad eccezione di f_{12} che si ricava essere dato da

$$f_{12} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\omega. \tag{15}$$

Si ha dunque

$$\psi\boldsymbol{I} = f_{12}\boldsymbol{J}, \qquad \psi\boldsymbol{J} = f_{12}\boldsymbol{I}, \qquad \psi\boldsymbol{K} = 0,$$

e in tal modo sono anche identicamente verificate le condizioni (9) e (11).

In base a questi risultati, indicando con x, y, z le coordinate della generica particella P, la (12) diventa

$$-\frac{1}{2}(\omega^2 - f_{12}^2)(x^2+y^2) + \gamma_0^2\omega^2(x^2 + y^2) + \gamma_0^2\omega f_{12}(x^2 - y^2) = U - \frac{p}{\rho_0} + \text{cost.} \tag{16}$$

Ponendo

$$\begin{aligned} U_0 &= \pi f abc\rho_0 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi(\lambda)}}, \qquad & A_1 &= \pi f abc\rho_0 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{\Phi(\lambda)}}, \\ A_2 &= \pi f abc\rho_0 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\sqrt{\Phi(\lambda)}}, \qquad & A_3 &= \pi f abc\rho_0 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)\sqrt{\Phi(\lambda)}}, \end{aligned} \tag{17}$$

ove f è la costante di attrazione universale ed è

$$\Phi(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 = \lambda),$$

il potenziale dell'ellissoide omogeneo considerato, in punti interni, risulta come si sa

$$U = U_0 - (A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2)$$

e pertanto in superficie, ove la pressione è nulla, o costante, la (16) porge

$$\left[A_1 - \frac{1}{2}(\omega^2 - f_{12}^2) + \gamma_0^2 \omega(\omega + f_{12})\right] x^2 +$$
$$+ \left[A_2 - \frac{1}{2}(\omega^2 - f_{12}^2) + \gamma_0^2 \omega(\omega - f_{12})\right] y^2 + A_3 z^2 = \text{cost.}$$

Questa, con una opportuna scelta della costante del 2° membro, deve identificarsi con l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{z^2} = 1.$$

Pertanto affinchè per la massa fluida considerata possano esistere forme ellissoidali a tre assi devono essere verificate le condizioni

$$(18) \qquad \begin{aligned} a^2\left[A_1 - \frac{1}{2}(\omega^2 - f_{12}^2) + \gamma_0^2 \omega(\omega + f_{12})\right] = \\ = b^2\left[A_2 - \frac{1}{2}(\omega^2 - f_{12}^2) + \gamma_0^2 \omega(\omega - f_{12})\right] = c^2 A_3, \end{aligned}$$

ove f_{12} è espresso dalla (15). Le (18) costituiscono due condizioni che legano i semiassi a, b, c dell'ellissoide con la velocità angolare ω. Fissata ω entro limiti convenienti, e supposto noto il volume (o la massa) dell'ellissoide, risulteranno determinati in conseguenza i semiassi a, b, c, i quali dipenderanno anche dalla costante γ_0 che è in relazione con l'intensità del campo magnetico trasversale indotto.

Il moto delle particelle fluide nella massa ellissoidale che così si caratterizza sarà un moto ellittico intorno all'asse di rotazione, mentre la massa medesima avrà forma invariabile rispetto a un osservatore fisso.

Sostituendo in luogo di f_{12} il suo valore, dalle (18) si ricavano le relazioni equivalenti

$$(19) \qquad \begin{aligned} A_1 - \frac{c^2}{a^2} A_3 &= \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}\omega^2 - 2\gamma_0^2 \frac{b^2}{a^2 + b^2}\omega^2 \\ A_2 - \frac{c^2}{b^2} A_3 &= \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}\omega^2 - 2\gamma_0^2 \frac{a^2}{a^2 + b^2}\omega^2. \end{aligned}$$

Tenendo conto dei valori di A_1, A_2, A_3, si riconosce subito che i primi membri delle equazioni (19), per $a > b > c$, sono essenzialmente positivi. Tali saranno anche i secondi membri e pertanto sarà necessariamente

$$\gamma_0^2 < \frac{b^2}{a^2 + b^2} < \frac{1}{2}.$$

Ponendo

$$s = \frac{c^2}{a^2}, \qquad t = \frac{c^2}{b^2}$$

la prima delle (19) diventa

$$\frac{2s}{s+t}\left(\frac{t}{s+t} - \gamma_0^2\right)\omega^2 = A_1 - sA_3, \tag{20}$$

mentre eliminando ω^2 si ha facilmente

$$t[s - \gamma_0^2(s+t)]A_1 - s[t - \gamma_0^2(s+t)]A_2 + st(t-s)A_3 = 0. \tag{21}$$

Queste due ultime equazioni possono servire di base per un'utile discussione del problema. Così pure col procedimento seguito nel lavoro citato in ([4]) si possono studiare le oscillazioni magnetoidrodinamiche in prossimità della soluzione stazionaria ellissoidale qui caratterizzata.