UMI

Recensioni.

* Convegno internazionale di geometria differenziale, Cremonese, Roma, 1954 (Alessandro Terracini)
* G. Fichera, Lezioni sulle trasformazioni lineari, Vol. I: Introduzione all'Analisi lineare, Istituto Matematico dell'Università di Trieste, 1954 (Aldo Ghizzetti)
* E. R. Lorch, La teoria delle trasformazioni lineari negli spazi di Banach, Istituto Matematico dell'Università di Roma, 1954 (Dario Del Pasqua)
* L. P. Natanson, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Akademie Verlag, Berlin (Giovanni Sansone)
* A. G. Kurosch, Gruppentheorie, Akademie Verlag, Berlin, 1953 (Guido Zappa)
* N. I. Achieser, Vorlesungen über Appreoximationstheorie, Akademie Verlag, Berlin, 1953 (Luigi Merli)
* Mario Abeille, Nuove Tavole Logaritmiche Finanziarie a otto decimali, Zanichelli Editore, Bologna, 1954 (Giuseppe Varoli)
* Automatic Digital Computation, Her Majesty's Stationery Office, Londra, 1954 (Manlio Mandò)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 455–466.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_455_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

RECENSIONI

Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 20-26 settembre 1953, promosso dalla Unione Matematica Italiana con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, edizioni Cremonese, Roma 1954, di pp. XV + 340; L. 4000.

Esce ora il volume contenente gli Atti del Convegno di Geometria differenziale (Symposium on Differential Geometry), svoltosi per iniziativa dell'Unione Matematica Italiana, sotto gli auspici della International Mathematical Union, nel settembre del 1953. In ordine di tempo, è stato questo il primo convegno patrocinato dall'International Mathematical Union: del suo successo i lettori del Bollettino sono già stati informati a suo tempo.

Oltre ai discorsi di apertura e di chiusura, tenuti rispettivamente da E. Bompiani e da G. Sansone, il volume contiene il testo di quaranta comunicazioni svolte durante il convegno (dieci in francese, undici in inglese, tredici in italiano, sei in tedesco). Sono, si può dire nella loro totalità, comunicazioni molto interessanti, sia che facciano il punto su questioni di attualità, sia che riferiscano su ricerche svariate, sempre nell'ambito della geometria differenziale, o strettamente attinenti.

L'insieme delle teorie che si raccolgono sotto il nome della geometria differenziale abbraccia oggi un campo così vasto che necessariamente, senza discostarsi dal tema prefissato per il Convegno, le comunicazioni raccolte nel volume riflettono la predilezione dei singoli Autori per l'uno o per l'altro degli indirizzi ai quali quelle teorie fanno capo.

Così dal calcolo tensoriale, varietà riemanniane, connessioni affini, connessioni non lineari, spazi vari — in particolare quello della teoria unitaria di Einstein —, spazi di Finsler, strutture varie, forme differenziali esterne, relazioni ed interferenze tra geometria differenziale e geometria algebrica, si va alla geometria differenziale classica, alla proiettiva, a quella di Laguerre, allo spazio isotropo, alla geometria differenziale relativa, allo spazio hilbertiano, alla « geometria delle differenze », al calcolo delle variazioni, a questioni varie.

Moltissime tra le comunicazioni sarebbero da segnalare singolarmente. Per ragioni di spazio ci limitiamo a farlo per le due concernenti la geometria differenziale in grande delle superficie: quella dove Hopf passa magistralmente in rassegna problemi risolti e non risolti sull'esistenza di superficie chiuse dello spazio euclideo aventi date proprietà differenziali, e l'attraente resoconto di A. D. Alexandrov sulle ricerche compiute specialmente in U.R.S.S. su superficie anche non regolari, fondate su metodi geometrici intuitivi (quale il vecchio metodo di « tagliare e attaccare ») — metodi che, come dice l'A., hanno la grande attrattiva di introdurre nella teoria delle superficie quell'intuizione che è per così dire l'anima della geometria — arricchiti con precisi concetti moderni.

Ecco del resto l'elenco delle comunicazioni contenute nel volume:

A. D. ALEXANDROV: *Synthetic Methods in the Theory of Surfaces.*

W. BARTHEL: *Ueber Minkowskische und Finslersche Geometrie.*

G. BOULIGAND: *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

E. ČECH: *Deformazione proiettiva di strati d'ipersuperficie.*

R DEBEVER: *Sur une structure infinitésimale régulière associée aux intégrales d'hypersurfaces du calcul des variations.*

P. DEDECKER: *Systèmes differentiels extérieurs, invariants intégraux et suites spectrales.*

B. ECKMANN: *Structures complexes et transformations infinitésimales.*

W. FENCHEL: *On Curvature and Levi-Civita's Parallelism in Riemann Manifolds.*

G. FINIKOFF: *Systèmes de congruences W.*

P. FINSLER: *Ueber die Berechtigung Infinitesimalgeometrischer Betrachtungen.*

L. GODEAUX: *Quadriques et coniques de Moutard.*

H. GUGGENHEIMER: *Topologia differenziale delle trasformazioni cremoniane e delle riemanniane di funzioni di più variabili complesse.*

J. HAANTJES: *On the Notion of Geometric Object.*

W. V. D. HODGE: *Differential Geometry and the Theory of Algebraic Varieties.*

H. HOPF: *Zur Differentialgeometrie geschlossener Flächen im Euklidischen Raum.*

R. INZINGER: *Zur Differentialgeometrie der Faltungsgruppe im Hilbertschen Raum.*

E. KAHLER: *Osservazioni a proposito della dinamica.*

A. KAWAGUCHI: *On the Theory of Non-linear Connections.*

W. KLINGENBERG: *Sui sistemi di sfere nella Geometria di Laguerre.*

N. H. KUIPER: *On convex Locally-projective Spaces.*

P. LIBERMANN: *Sur la courbure et la torsion de certaines structures infinitésimales.*

A. LICHNEROWICZ: *Sur les groupes d'holonomie des variétés Riemanniennes et Kahleriennes.*

M. PASTORI: *Sullo spazio della recente teoria unitaria di Einstein.*

M. PICONE: *Sulle condizioni necessarie per un estremo, nel calcolo delle variazioni.*

G. REEB: *Sur certains problèmes relatifs aux variétés presque-symplectiques et systèmes dynamiques.*

H. RUND: *On the Geometry of Generalised Metric Spaces.*

G. SANSONE: *Sul problema del Bianchi dell'applicabilità sopra una superficie isoterma.*

R. SAUER: *Ueber Flächenklassen, bei denen sämtliche Infinitesimale Verbiegungen durch Quadraturen darstellbar sind.*

F. SBRANA: *Su alcune proprietà delle curve sghembe.*

J. A. SCHOUTEN: *On the Differential Operators of First Order in Tensor Calculus.*

B. SEGRE: *Questioni di realtà sulle forme armoniche ternarie e sulle loro hessiane.*

F. SEVERI: *Sulla caratterizzazione dei corpi di funzioni quasi abeliane.*

A. SIGNORINI: *Sui moti rigidi sferici.*
K. STRUBECKER: *Alcune applicazioni della geometria differenziale dello spazio isotropo.*
W. SÜSS: *Ueber affine und Minkowskische Geometrie.*
P. VINCENSINI: *Sur une généralisation d'un problème de déformation de L. Bianchi.*
A. G. WALKER: *Riemann Extensions of Non-riemannian Spaces.*
T. J. WILLMORE: *Some Properties of Harmonic Riemannian Manifolds.*
W. WUNDERLICH: *Nuovi modelli delle superficie a curvatura costante negativa.*
K. YANO: *Groups of Motions and Groups of Affine Collineations.*

Non piccolo merito di chi ha preparato il volume e aver saputo in breve tempo raccogliere il testo di quasi tutte le comunicazioni svolte nel Convegno (ne manca soltanto una): il merito sarà particolarmente apprezzato da chi per esperienza sa come non sempre gli autori consegnino i manoscritti appena ne sono richiesti.

Si ripercuote del resto anche in questo particolare la perfetta organizzazione del Convegno svoltosi in modo ammirevole congiuntamente con le commemorazioni di Gregorio Ricci Curbastro, di Luigi Cremona e di Luigi Bianchi.

Coloro che al Convegno hanno partecipato associeranno con piacere la lettura delle comunicazioni al ricordo delle splendide sedi dove esso si è svolto: le antiche università di Padova, di Bologna, di Pisa, ed il Centro internazionale d'arte e di cultura della Fondazione Cini, nell'isola di San Giorgio Maggiore a Venezia, coi suoi ambienti sapientemente restaurati, col cenacolo palladiano e la biblioteca del Longhena, coi suoi loggiati ed i chiostri.

Per tutti il volume è di alto interesse scientifico; ottimo anche esteriormente, nonostante la presenza di alcuni pochi errori di stampa.

ALESSANDRO TERRACINI

G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari.* VOLUME I: *Introduzione all' Analisi lineare.* Istituto Matematico dell' Università di Trieste 1954 - pag. XVII + 502.

Nella Prefazione l'Autore dichiara che questo volume comprende una parte delle lezioni dei corsi di Analisi superiore che Egli ha tenuto presso l'Università di Trieste negli anni accademici 1950-51, 1951-52, 1952-53, ma basta dare una rapida scorsa al contenuto del libro per accorgersi che tale dichiarazione dell'Autore è troppo modesta. Quest'opera, per la vastità e l'elevatezza degli argomenti trattati e per le numerose ed interessanti applicazioni che vi sono svolte, va ben oltre i limiti di un (sia pur triennale) corso universitario e deve essere qualificata come un vero e proprio trattato. E si può aggiungere che questo trattato è degno della massima attenzione a causa dei numerosi e notevoli contributi originali apportati dall'Autore nello svolgimento dei vari argomenti.

Il volume attuale (che deve servire come introduzione a due successivi di cui l'Autore preannuncia il programma) consta di nove capitoli.

Nel Cap. I sono esposti i concetti generali relativi agli insiemi astratti, la teoria dei limiti e le nozioni fondamentali sugli spazi topologici (di Hausdorff). E' soprattutto notevole il modo generalissimo con cui viene impostato il concetto di limite, ma meritano anche attenzione gli articoli sugli insiemi boreliani e sulle funzioni di Baire.

Il Cap. II è dedicato agli spazi metrici ed è da rilevare l'accuratezza con cui sono distinte le parti che richiedono l'uso del postulato di Zermelo da quelle che non lo richiedono.

Nella prima parte del Cap. III viene svolta la teoria degli insiemi lineari, in modo puramente algebrico, senza far intervenire le nozioni introdotte nei due precedenti capitoli. Viene tra l'altro stabilito, in modo originale, un principio generale dell'alternativa per un'equazione lineare. Nella seconda parte dello stesso Capitolo si collega la nozione di insieme lineare con quella di spazio topologico o metrico, arrivando al concetto di spazio lineare e si studiano, in particolare, gli spazi lineari di Fréchet. Chiude il Capitolo III una interessante raccolta di applicazioni alle equazioni differenziali o integrali, ove si ravvisa una originalità degna di nota.

Il Cap. IV è dedicato agli spazi di Banach e contiene, in fine, altre notevolissime applicazioni a questioni esistenziali per i problemi al contorno relativi alle equazioni lineari a derivate parziali.

Nel successivo Cap. V viene svolta la teoria degli spazi di Hilbert, in modo rapido e suggestivo, e successivamente quella delle trasformazioni hermitiane totalmente continue. Anche qui sono veramente interessanti le applicazioni, che concernono in prevalenza il problema del calcolo degli autovalori, con novità di trattazione ed originalità di risultati.

Col Cap. V si può dire conclusa la prima parte del volume ove, come si è già implicitamente osservato, si ravvisa la costante preoccupazione dell'Autore di mostrare che la teoria degli spazi astratti è di importanza vitale sia per i problemi dell'analisi classica, sia per quelli posti dalla Fisica-matematica.

Il libro prosegue con i tre Capitoli VI, VII, VIII rispettivamente dedicati alla teoria della misura, dell'integrazione e della derivazione delle funzioni di insieme. Tali teorie sono tutte svolte negli insiemi astratti.

La teoria della misura del Cap. VI viene fondata su due teoremi di prolungamento per le funzioni completamente additive ed a variazione limitata ed è svolta in modo da essere immediatamente particolarizzata in quella di Lebesgue negli spazi euclidei. La trattazione è veramente notevole e si deve giudicare anche dotata di una certa originalità, malgrado i punti di contatto che essa presenta con quella svolta da K. Mayrhofer nel recentissimo libro «Inhalt und Mass».

La teoria dell'integrale è sviluppata in modo completo nel Cap. VIII ove si conclude con una notevole costruzione dei funzionali lineari continui definiti in certi spazi di Banach.

Merita poi una particolare segnalazione il successivo Cap. VIII sulla derivazione delle funzioni additive d'insieme. Qui l'Autore dà una nuova definizione di derivata, mediante la quale riesce a svolgere la teoria senza richiedere necessariamente la completa additività delle funzioni. Questo Capitolo si conclude con le applicazioni alle ordinarie funzioni di una o più variabili.

Il volume termina col Cap. IX concernente gli spazi funzionali, con lo studio di numerosi casi particolari di tali spazi. Interessante la parte concernente gli spazi funzionali di Hilbert dotati di nucleo riproducente (cioè dotati di «kernel function» secondo la locuzione usata in America).

Ogni Capitolo è accompagnato da un'accurata bibliografia. La rapida rassegna che abbiamo fatta dei vari Capitoli non è forse sufficiente a dare una idea adeguata della vastità della materia contenuta in questo libro. Conviene perciò rilevare che, nella letteratura preesistente, occorreva consultare varie opere per trovare i diversi tipi di argomenti qui raccolti. Ed è veramente notevole come l'Autore sia riuscito a condensare in 500 pagine tanta dovizia di teorie, di metodi, di risultati e di applicazioni. Lo stile è quindi necessariamente conciso e la lettura non è sempre facile, specialmente per persone non iniziate.

Riteniamo che questo libro sarà estremamente utile a tutti gli studiosi e sopratutto ai giovani che si avviano alla ricerca nel campo dell'analisi matematica; il lieve sforzo che essi dovranno compiere nella lettura sarà largamente compensato dalla vastità dei panorami che il libro può presentare alla loro mente.

E ciò spinge a formulare l'augurio di vedere presto pubblicati gli altri due volumi annunciati dall'Autore ed a rallegrarsi con Lui per un così cospicuo apporto alla letteratura matematica.

ALDO GHIZZETTI

E. R. LORCH, *La teoria delle trasformazioni lineari negli spazi di* BANACH, Istituto Matematico dell' Università di Roma, 1954.

Si tratta di un riassunto (in copie ciclostilate, e redatto dall'Autore) di un corso tenuto presso l'Istituto Matematico dell'Università di Roma nell'anno 1953-54, nel quadro degli scambi culturali italo-americani.

Poste le definizioni preliminari relative agli spazi vettoriali, normati e di BANACH (a scalari reali e complessi), nel Cap. I l'A. svolge la teoria dei funzionali lineari limitati, cioè dei funzionali distributivi omogenei e continui, che altri autori (come S. BANACH nel classico libro *Les opérations linéaires,* e F. RIESZ - B. SZ. NAGY nelle loro recentissime *Leçons d'analyse fonctionnelle*) chiamano semplicemente lineari Vien dato il teorema di HAHN-BANACH e si introduce lo spazio aggiunto, nel quale viene introdotta una particolare topologia, diversa da quella derivante dalla norma, detta *topologia debole, che troverà applicazioni interessanti nello studio delle algebre di BANACH, relativamente a questioni di compattezza (si veda il corso tenuto dallo stesso A. all'International Mathematical Summer Center a Varenna, nel Giugno 1954, e qui recensito).

Nel Cap. II vengono studiate le trasformazioni lineari limitate. Si definisce la trasformazione aggiunta di una trasformazione lineare limitata, e si dà il teorema della limitatezza della trasformazione inversa, ed il teorema della limitatezza uniforme (forse sarebbe meglio dire equilimitatezza). Si introducono anche le trasformazioni lineari non limitate, ma chiuse, e si fa uno studio preliminare sulle proiezioni. Il capitolo si chiude con la dimostrazione del teorema ergodico nella forma generale per spazi riflessivi, già data dall'A. nel 1939 (Bull. Amer. Math. Soc., 45).

Il Cap. III è dedicato allo spazio di HILBERT, definito astrattamente come uno spazio vettoriale dotato di un prodotto interno, mediante cui resta definita una norma, con la quale lo spazio risulta completo. Premesse le proprietà fondamentali del prodotto scalare, che caratterizza lo spazio, si dà il teorema di FRÉCHET-RIESZ, e, introdotta la nozione di ortogonalità, vien dimostrato il teorema fondamentale sui sistemi ortonormali completi. Si passa poi allo studio delle trasformazioni lineari dello spazio hilbertiano; in particolare si studiano le trasformazioni autoaggiunte, e fra queste le proiezioni ortogonali. Si introduce quindi la famiglia di proiezioni ortogonali E_λ detta «risoluzione dell'identità», in relazione alla quale vien poi definito un «integrale» del tipo di STIELTJES di una funzione $f(\lambda)$; se $f(\lambda) = \lambda$, tale integrale dà luogo ad una trasformazione autoaggiunta. Infine vien dato un cenno sulle trasformazioni unitarie, che costituiscono il cosidetto gruppo unitario dello spazio di HILBERT.

Il Cap. IV tratta della teoria spettrale delle trasformazioni lineari. Vi viene esposta la teoria della riducibilità di una trasformazione lineare in uno spazio di BANACH complesso; ciò è conseguito mediante l'introduzione di un integrale del tipo di CAUCHY di una trasformazione lineare dipendente da un parametro, lungo una data curva di integrazione. Tutto ciò viene poi applicato al caso delle trasformazioni autoaggiunte degli spazi hilbertiani, per mostrare come ogni tale trasformazione può esprimersi nella forma $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$, dove E_λ è un'opportuna risoluzione dell'identità.

Questo il contenuto del corso. Gli argomenti trattati sono per lo più classici, ma vien tenuto conto dei risultati e degli sviluppi più recenti (si veda specialmente l'ultimo capitolo). Le conoscenze presupposte sono minime (nozioni generali sugli insiemi e sugli spazi metrici). La redazione è in stile molto conciso, talvolta anche troppo, come nel caso di certi teoremi di fondamentale importanza, le cui dimostrazioni sono poco più che abbozzate; tuttavia in generale è abbastanza agevole completarle nei loro dettagli, anche i più delicati, ed il testo fornisce gli elementi necessari a questo. Una lacuna, sulla quale non si può tacere, è la mancanza di riferimenti bibliografici; l'A. scherzosamente dice di considerare le questioni bibliografiche come «mari pericolosi», che «preferisce lasciar navigare a marinai più arditi»; veramente è fuori dubbio ch'Egli può navigare quei mari con sicurezza: fra l'altro, anche il perspicuo ordinamento della materia lo mostra.

DARIO DEL PASQUA

L. P. NATANSON, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, (mit. 9 Abbildungen in Text); XI + 478; Math. Lehrbücher u. Monographien, Akademie Verlag, Berlin (*).

Trattasi della traduzione tedesca, fatta da E. Holder, di un volume di L. P. Natanson, di Leningrado, dedicato agli studenti dei secondi bienni di matematica.

Ai classici volumi di Ch. J. De La Vallés Poussin « Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire » del 1916, alle celebri «Vorlesungen über reelle Funktionen » di C. Caratheodory, del 1917, al grande trattato in due volumi di E. W. Hobson « The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series » del 1921-26, seguirono poi, presso quasi tutte le Nazioni, dei trattati volti principalmente ad esporre in forma sintetica, a coloro che erano già bene orientati nell'Analisi, quelle teorie che si erano manifestate più feconde di applicazioni. A questi ultimi si accompagnarono e si accompagnano trattazioni nelle quali sono preminenti esigenze di carattere didattico e fra queste spicca quella di Natanson.

Al lettore sono esposte gradualmente, in forma piana, tutte le nozioni fondamentali dell'Analisi delle funzioni di variabile reale, ed egli è condotto

(*) Iniziamo con la presente una serie di recensioni di Opere russe molto opportunamente tradotte in tedesco dalla Accademia delle Scienze di Berlino. (N.d.R.).

al possesso di quanto occorre per approfondire poi in modo autonomo quei rami che più lo interesseranno.

Il volume è diviso nei seguenti Capitoli: 1. Insiemi infiniti; 2. Insiemi di punti; 3. Insiemi misurabili; 4. Funzioni misurabili; 5. Integrale di Lebesgue delle funzioni limitate; 6. Funzioni sommabili; 7. Funzioni di quadrato sommabile; 8. Funzioni a variazione limitata, integrale di Stieltjes; 9. Assoluta continuità delle funzioni e integrale indefinito di Lebesgue; 10. Integrali singolari. Serie trigonometriche; 11. Insiemi di punti nello spazio a due dimensioni; 12. Funzioni misurabili di più variabili e loro integrazione; 13. Funzioni di insieme e loro applicazione nella teoria dell'integrazione; 14. Numeri transfiniti; 15. La classificazione di Baire; 16. Sull'analisi funzionale; 17. L'apporto degli scienziati russi e sovietici alla teoria delle funzioni di variabile reale.

Gli indici finali facilitano la consultazione del volume, stampato dalla Akademie Verlag di Berlino con la nota perfezione.

GIOVANNI SANSONE

A. G. KUROSCH, *Gruppentheorie*, Akademie Verlag, Berlin, 1953.

La comparsa di alcuni trattati, nella storia della Teoria dei Gruppi, ha costituito talora la presa di coscienza, da parte del mondo matematico, di certe svolte decisive avvenute nello sviluppo della teoria, e nello stesso tempo ha favorito l'incanalamento degli studiosi verso i nuovi indirizzi. Basti citare la apparizione del *Lehrbuch der Gruppentheorie* di ZASSENHAUS, che, a differenza dei trattati precedenti, concernenti in genere i soli gruppi finiti, per la prima volta codificò i risultati raggiunti dalla scuola tedesca dell'Algebra moderna nello studio delle proprietà generali dei gruppi, indipendentemente dalla loro finitezza, e nello stesso tempo promosse una fioritura di ricerche secondo questo nuovo indirizzo.

Altrettanto può dirsi della *Gruppentheorie* del KUROSCH. Questo libro, apparso in Russia nel 1944, solo nel 1953 è stato tradotto in tedesco a cura dell'Accademia tedesca delle Scienze di Berlino, mentre ultimamente è stata annunciata la comparsa di una seconda edizione russa, assai diversa dalla prima a causa dei notevoli sviluppi avutisi nella Teoria dei gruppi nell'ultimo decennio. Sarebbe desiderabile, data la scarsa conoscenza della lingua russa nel mondo occidentale, che anche questa nuova edizione venisse al più presto tradotta in una lingua più diffusa. Per ora mi devo limitare a recensire l'edizione tedesca che possediamo, e che corrisponde alla prima edizione russa.

La novità essenziale del libro del KUROSCH consiste nel riportare per la prima volta in un trattato alcuni recenti capitoli della Teoria dei gruppi, concernenti principalmente i gruppi infiniti: p. es. la teoria dei gruppi abeliani con infiniti generatori, quella dei gruppi liberi e dei prodotti liberi, e lo studio delle proprietà reticolari dei gruppi.

I primi cinque Capitoli, ad eccezione forse del terzo, riproducono parti ormai classiche della Teoria, presentate però spesso in modo nuovo, con diversi riferimenti particolari ai gruppi infiniti. Segnaliamo, nel primo Capitolo, il paragrafo dedicato all'assiomatica di BAER e LEVI, nel quarto, il cenno all'estensione, dovuta allo stesso KUROSCH, alle serie infinite dei teoremi sulle catene e serie normali (di SCHREIER-ZASSENHAUS, di JORDAN-HÖLDER, etc.), nel quinto, il modo semplice ed elegante in cui vien presentata la teoria della base per i gruppi abeliani con un numero finito di generatori. Il terzo Capitolo tratta della definizione dei gruppi mediante sistemi di generatori e di relazioni tra essi, e pone le prime proprietà dei gruppi liberi, argomento che vien poi ripreso in un successivo capitolo.

Il sesto Capitolo, dopo aver introdotto il concetto di prodotto diretto, porge i criteri di decomposizione di un gruppo nel prodotto diretto di fattori irriducibili e la teoria di REMAK-SCHMIDT sopra l'isomorfismo tra i fattori di due diverse decomposizioni di un gruppo nel prodotto diretto di sottogruppi irriducibili. Chiude il Capitolo un'esposizione dei fondamenti della teoria dell'ampliamento dei gruppi secondo l'indirizzo di SCHREIER. Il Capitolo settimo, dopo alcune premesse sui cosiddetti gruppi con «Minimalbedingung», cioè a catene discendenti limitate, svolge la teoria dei gruppi risolubili, dei sottogruppi di SYLOW, dei p-gruppi e dei gruppi speciali, senza limitarsi ai gruppi finiti, ma includendo anche i gruppi infiniti.

Gli ultimi quattro capitoli sono del massimo interesse, perchè trattano argomenti che sino ad ora non erano stati inseriti in alcun manuale. L'ottavo e il nono concernono la teoria dei gruppi abeliani con infiniti generatori. Vien prima svolta la teoria dei gruppi abeliani ad elementi tutti periodici, che si riduce immediatamente a quella dei gruppi abeliani «primari» (Cap. VIII), cioè dei gruppi abeliani in cui tutti gli elementi sono periodici con periodo potenza di un medesimo numero primo. Vien dato il teorema di PRÜFER sopra la decomposizione in prodotto diretto di gruppi ciclici per i gruppi abeliani primari numerabili senza elementi di altezza infinita (un elemento di un gruppo primario abeliano si dice di altezza infinita quando può ottenersi come potenza di elementi del gruppo ad esponente grande quanto si vuole); indi vengono dati i teoremi di ULM sui gruppi abeliani primari con elementi di altezza infinita. Successivamente (Cap. IX) viene svolta la teoria dei gruppi abeliani « senza torsione », cioè senza elementi periodici, e quello dei gruppi misti, cioè dotati di elementi periodici e aperiodici: a tali teorie hanno dato decisivi apporti lo stesso KUROSCH ed altri autori russi.

Il decimo Capitolo si ricollega al terzo e studia i prodotti liberi dei gruppi. La teoria dei prodotti liberi contiene quella dei gruppi liberi, perchè un gruppo libero non è che un prodotto libero di gruppi ciclici aperiodici. Vengono dati i teoremi sulla libera decomposizione dei sottogruppi di un prodotto libero, quelli sugli isomorfismi tra le decomposizioni libere con un numero finito di generatori, e alcuni risultati sui gruppi localmente liberi.

L'ultimo Capitolo riguarda un campo di studi tuttora in evoluzione: quello delle proprietà reticolari dei gruppi, in particolare delle proprietà del reticolo formato dai sottogruppi di un gruppo. Vi figurano la determinazione dei gruppi a reticolo dei sottogruppi distributivo (ORE), l'estensione di alcuni teoremi sui gruppi ai reticoli modulari, e le condizioni perchè gruppi non isomorfi abbiano isomorfi i reticoli dei sottogruppi.

Una conclusione all'opera, del massimo interesse, presenta i principali problemi aperti in vari capitoli della teoria. Vengono citati il problema della classificazione di vari tipi di gruppi mediante invarianti, quelli sui prodotti diretti e liberi, con particolare riferimento ai prodotti liberi con sottogruppi amalgamati, quelli sui gruppi abeliani infiniti, sui gruppi periodici, sui gruppi infiniti risolubili, sui gruppi con un numero finito di generatori, sui gruppi localmente liberi, sulla rappresentazione dei gruppi, e sul reticolo dei sottogruppi di un gruppo. Molti dei problemi indicati, come è affermato in nota, sono stati risoluti nell'ultimo decennio.

L'Autore si è evidentemente imposto dei limiti per non accrescere troppo la mole dell'opera: così, non vi figura un'esposizione dettagliata delle proprietà dei gruppi finiti, nè la teoria della rappesentazione dei gruppi. La teoria dei gruppi è oggi diventata così vasta, da non potersi più compendiare in un volume: i vari trattati finiscono però per integrarsi a vicenda, e a dare, nel loro insieme, un panorama abbastanza completo.

Nell'edizione tedesca figura un'aggiunta di B. H. NEUMANN sopra i prodotti liberi generalizzati, e in particolare sopra i prodotti liberi con un sottogruppo amalgamato, e le relative applicazioni a problemi di immersione. Si tratta di risultati importanti, raggiunti dopo l'apparizione della prima edizione russa da vari autori, tra cui principalmente lo stesso B. H. NEUMANN, HANNA NEUMANN e G. HIGMAN. Chiudono il volume un indice analitico e un'ampia bibliografia, aggiornata sino ad oggi, in cui vengono indicati tutti i principali lavori sui gruppi apparsi negli ultimi tempi, con particolare riferimento alla scuola russa.

Ottima la veste tipografica. La forma è molto piana; la trattazione mira sempre all'essenziale, rifuggendo dai formalismi frequenti in molte moderne esposizioni algebriche, ed è illuminata da numerosi esempi. Il libro incontrerà indubbiamente il favore non solo degli specialisti, ma anche dei cultori di campi affini cui interessa la conoscenza dei punti di vista moderni della teoria dei gruppi.

GUIDO ZAPPA

N. I. ACHIESER, *Vorlesungen über Approximationstheorie,* Akad. Verlag, Berlin, 1953; pp. I-IX; 1-309.

Questo volume è una traduzione in lingua tedesca, fatta presso il Forschungsinstitut für Mathematik di Berlino sotto la guida di L. Kaloujnine, delle lezioni sulla teoria dell'approssimazione, apparse nel 1947 in lingua russa (N. I. Achieser, Lekzii po teorii approximatzii, OGIZ, Mosca-Leningrado, 1947|.

La divisione originaria del libro in 6 capitoli è stata pienamente rispettata. Nel 1. cap. è trattata la teoria dell'approssimazione negli spazi lineari normati, con particolare riguardo allo spazio hilbertiano. Il 2. cap. è dedicato al problema della migliore approssimazione. Il 3. cap. è un'introduzione all'analisi armonica e il 4. riguarda alcune proprietà estremali delle funzioni intere di tipo esponenziale. Il problema della migliore approssimazione mediante polinomi trigonometrici è trattato nel 5. cap. e i relativi risultati vengono estesi alle funzioni intere di tipo esponenziale. Il teorema di approssimazione di Wiener costituisce l'argomento centrale del 6. ed ultimo cap.

Completano il volume alcune appendici contenenti complementi e problemi vari.

E' innegabile l'utilità dell'attuale traduzione la quale permette di dare all'opera di Achieser la diffusione che essa merita per i pregi di chiarezza, di originalità e di moderna visione degli argomenti trattati.

Contribuisce a rendere piacevole la lettura l'elegante veste tipografica.

LUIGI MERLI

MARIO ABEILLE: *Nuove Tavole Logaritmiche Finanziarie a otto decimali*, N. Zanichelli Editore, Bologna, 1954 (pp. 16 + 71 + 10, L. 1.200)

Il volume, che si presenta in buona rilegatura ed in nitidi caratteri di stampa, è diviso in tre parti. La prima contiene, dopo una brevissima prefazione, la spiegazione dettagliata per l'uso delle Tavole. La seconda è costituita dalle Tavole vere e proprie. La terza, che rappresenta un'Appendice, contiene cenni sulla teoria dei logaritmi e la dimostrazione della relazione

$$\text{Log}\,(\text{Antilog}\,\Delta L - 1) = K,$$

che ha servito per la compilazione della Tav. 2ª, in cui è

$$\Delta L = \text{Log}\,(N + \Delta N) - \text{Log}\,N,$$

$$K = \text{Log}\,\Delta N - \text{Log}\,N,$$

rappresentando N le prime quattro cifre significative del numero di cui si cerca il logaritmo e ΔN le rimanenti cifre.

Le Tavole si compongono di due parti: una (Tav. 1ª e Tav. 2ª) che serve per la ricerca dei logaritmi, l'altra (Tav. 3ª di pp. 13) che fornisce i logaritmi, con 9 cifre decimali, della funzione finanziaria

$$(1 + i)^t,$$

con t eguale ad 1 mese e ad 1, 2, 3, 4, 5 anni ed i variabile di 0,0001 da 0,01 a 0,075.

La Tav. 1ª (pp. 29) comprende una prima parte (pp. 3) che dà i logaritmi dei numeri da 0001 a 1000 con caratteristica e cinque cifre decimali e serve per le interpolazioni, la parte rimanente dà i logaritmi con 8 cifre decimali dei numeri da 1000 a 9999. Quindi per semplice lettura si hanno le mantisse dei logaritmi a 8 decimali dei numeri di quattro cifre; per i numeri da quattro ad otto cifre è necessario ricorrere alla Tav. 2ª (pp. 29) che dà i valori di K al variare di ΔL. Questa Tavola è distinta in due parti: in una sono dati i valori di K per ΔL variabile di un'unità da 1 a 4999, nell'altra i valori di K per valori di $\Delta L \geqq 5000$, variabili di 10 in 10, in cui quindi è necessario procedere a semplici interpolazioni, facilitate da *PP*.

La ricerca dei logaritmi dei numeri con più di 4 cifre e degli antilogaritmi riesce meno agevole che con le usuali Tavole Logaritmiche perchè — a parte le operazioni di differenza e di somma, necessarie anche nelle altre Tavole per le interpolazioni — si debbono dedurre i valori necessari per la determinazione dei logaritmi e degli antilogaritmi consultando due Tavole in tre differenti pagine. Però, a vantaggio, bisogna dire che queste Tavole, in appena 58 pagine, danno la possibilità di ottenere i logaritmi dei numeri di 8 cifre significative, con 8 cifre decimali esatte.

Per quanto riguarda la Tav. 3ª, pur essendo richiesto per gli usi correnti di leggere direttamente e senza calcoli sussidiari i valori delle funzioni finanziarie $(1 + i)^t$, $a_{\overline{n}|\,i}$, $s_{\overline{n}|\,i}$, $\alpha_{\overline{n}|\,i}$, essa rappresenta — tenuto conto dei numerosissimi valori dati per il tasso i — un utile complemento delle comuni Tavole Finanziarie; quindi si può dire che, nel complesso, queste Tavole Logaritmiche Finanziarie si presentano come un nuovo utile strumento di calcolo che si aggiunge a quelli esistenti, formandone un elemento integrativo.

GIUSEPPE VAROLI

Automatic Digital Computation. Proceedings of a Symposium held at the *National Physical Laboratory* on March 25, 26, 27 and 28, 1953. Pag. 269, sterline 1. 1 s. Her Majesty's Stationery Office, Londra 1954.

Il volume raccoglie il testo delle comunicazioni fatte al Symposium di cui nel sottotitolo, nonchè un particolareggiato riassunto delle discussioni relative. Esso offre pertanto un quadro ampio e preciso, aggiornato al marzo 1953, delle questioni relative al calcolo numerico a mezzo di macchine automatiche, con particolare riguardo alle macchine inglesi; infatti delle 39 comunicazioni complessive, solo 5 sono di autori non inglesi. Fra queste ultime abbiamo notato con piacere la comunicazione di N. Kitz sulla macchina in allestimento all'Ist. Naz. Appl. del Calcolo in Roma; particolarmente importante, per il riferimento all'esperienza americana con la SEAC e la SWAC, la relazione di R. J. Slutz sullo sviluppo di vari problemi inerenti alle calcolatrici e sulle soluzioni adottate dal Nat. Bur. Standards.

Le comunicazioni sono divise per seduta e riguardano: 8 le macchine inglesi maggiori in generale (ACE, EDSAC, LEO, MADAM, MOSAIC, NICHOLAS, RASCAL, TRE), 4 la preparazione e codificazione dei programmi, 4 il progetto delle macchine, 8 la loro utilizzazione, 6 i circuiti e gli altri elementi costitutivi, 4 il servizio e la manutenzione delle macchine e 5 le calcolatrici di minor costo e mole.

Difficile, fra tanta varietà, qualunque segnalazione; volendo cercare di cogliere qualche aspetto saliente, si può notare il largo spazio dedicato, in numerose relazioni, all'esperienza di esercizio ottenuta con le macchine inglesi, sia per quanto riguarda la regolarità di funzionamento e la pronta localizzazione dei guasti, sia per quanto riguarda il controllo dei programmi (che, essendo preparati da uomini, sono stati causa di errori con perdite di tempo spesso confrontabili con quelle dovute a guasti della macchina); l'esperienza nel complesso può considerarsi positiva.

Dal punto di vista matematico, sebbene vi siano interessanti contributi delle macchine alla matematica pura, specie nel campo della teoria dei numeri, la parte più interessante appare quella riguardante la preparazione (impostazione, programmazione, codificazione, interpolazione etc.) dei calcoli, per cui si presentano al matematico nuovi problemi o prospettive nuove per problemi e metodi vecchi.

Infine, dal punto di vista pratico, è interessante notare la grande varietà di Enti che si sono direttamente interessati al problema, dalle Università (EDSAC e MADAM) al N.P.L. (ACE), dal Ministero dei rifornimenti (col suo MOSAIC) a ditte private (tra cui la Lyons Ltd. che ha ottenuto ottimi risultati dalla LEO, usata come grande macchina contabile), dall'Aereonautica (RASCAL) alle Telecomunicazioni (TRE).

In conclusione riteniamo che, sebbene il libro sia destinato essenzialmente a specialisti (e la relativamente scarsa bibliografia, in accordo col carattere di comunicazioni ad un Congresso specializzato, ce lo conferma), esso possa contribuire utilmente, anche per il suo basso costo, alla migliore conoscenza delle possibilità offerte dalle grandi macchine e dei problemi da esse posti in una più vasta cerchia di studiosi.

MANLIO MANDÒ