Bollettino Unione Matematica Italiana

Gabriella Manaresi

Sulle soluzioni sottoarmoniche semplici, nei sistemi non-lineari a due gradi di libertà.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 412–417.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_412_0>

Sulle soluzioni sottoarmoniche semplici, nei sistemi non-lineari a due gradi di libertà.

Nota di GABRIELLA MANARESI (a Bologna)

Sunto. - *Si determinano alcune semplici soluzioni sottoarmoniche per le oscillazioni forzate di un sistema non lineare a due gradi di libertà e si esamina la stabilità di tali soluzioni.*

1. Sia dato il sistema di equazioni differenziali non-lineari:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & L_1\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 - \varphi(\dot{x}_1) + \frac{x_1}{C_1} = \frac{E}{\omega_1} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \gamma) \\ & M\ddot{x}_1 + L_2\ddot{x}_2 + \frac{x_2}{C_2} = 0 \end{aligned} \right.$$

dove L_1, L_2, M, C_1, C_2, ω, γ sono costanti ed $M^2 < L_1L_2$; inoltre $\varphi(\dot{x})$ è un polinomio nelle potenze dispari di $\dot{x}$. Scriveremo cioè:

$$\varphi(\dot{x}) = a_1\dot{x} + \frac{a_3\dot{x}_1^3}{3} + \dots + \frac{a_r\dot{x}^r}{r} + \dots + \frac{a_n\dot{x}_1^n}{n}$$

dove r, n sono numeri dispari.

Il sistema (1) rappresenta due circuiti elettrici accoppiati induttivamente, il primo con resistenza non-lineare e soggetto a una forza elettromotrice impressa $\frac{E}{\omega_1}\,\mathrm{sen}\,(\omega_1 t + \gamma)$, l'altro con resistenza trascurabile.

Derivando le (1) e ponendo $y_1 = \dot{x}_1$, $y_2 = \dot{x}_2$, si ottiene un sistema formato da un'equazione di LIÉNARD, collegata, tramite un termine induttivo, all'equazione di un circuito lineare. Se $\varphi(\dot{x})$ si riduce al polinomio di terzo grado $\alpha\dot{x} - \frac{\beta\dot{x}^3}{3}$, la prima equazione diviene del tipo di VAN DER POL.

In questa nota, dimostreremo anzitutto che il sistema (1) (e di conseguenza quello che si ottiene derivando il sistema (1)) ammette, per particolari valori di ω_1 e dei coefficienti del polinomio che esprime $\varphi(\dot{x})$, soluzioni sinoidali di pulsazione $\omega = \frac{\omega_1}{n}$, cioè soluzioni sottormoniche semplici di ordine n; nel caso di VAN DER POL di ordine tre. Dunque anche *i sistemi non-lineari a due gradi di libertà possono avere soluzioni sottoarmoniche semplici.*

La ricerca della stabilità di tali soluzioni, offre notevoli difficoltà perchè occorre risolvere sistemi di equazione lineari a coefficienti periodici; questione molto complessa anche se la non linearità è debole. In questo caso però, almeno se M non è troppo elevato, quelle soluzioni possono ritenersi instabili.

2. Poniamo:

$$x_1 = A\cos\omega t \qquad\qquad x_2 = B\cos\omega t \tag{2}$$

dove A e B sono costanti.

Le (1) sono soddisfatte se:

$$\begin{cases} \varphi(-A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t) = \dfrac{E}{\omega_1}\,\mathrm{sen}\,(\omega_1 t + \gamma) \\ A\left(\dfrac{1}{C_1} - \omega^2 L_1\right) - BM\omega^2 = 0 \\ -AM\omega^2 + B\left(\dfrac{1}{C_2} - L_2\omega^2\right) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

La prima relazione è possibile solo se $\gamma = 0$, $\omega_1 = n\omega$ ed i coefficienti a_1, $a_3 \dots a_n$ soddisfano alle relazioni messe in evidenza dalla MINOZZI [1].

[1] L. MINOZZI: *Sulle soluzioni sottoarmoniche dell'equazione di Liénard*, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », (3) IX 1954, pagg. 196-198.

La seconda e la terza equazione sono possibili solo se ω^2 è una radice dell'equazione:

$$
\begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} - \omega^2 L_1 & - M\omega^2 \\ - M\omega^2 & \frac{1}{C_2} - \omega^2 L_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}
$$

cioè se ω è una delle pulsazioni delle oscillazioni libere dei due circuiti rappresentati da (1), qualora fosse nulla la resistenza non-lineare ed, ovviamente, la E. Soddisfatta la (4), una delle ultime di (3) permette di calcolare la B, nota la A.

Tornando alla prima di (3), osserviamo che, nel caso di VAN DER POL, tale equazione diventa:

$$
\alpha\omega A \operatorname{sen} \omega t - \frac{\beta A^3}{3} \omega^3 \operatorname{sen}^3 \omega t = \frac{E}{3\omega} \operatorname{sen} 3\omega t
$$

da cui, ricordando che $\operatorname{sen}^3 \omega t = \frac{3}{4} \operatorname{sen} \omega t - \frac{\operatorname{sen} 3\omega t}{4}$, si ricavano le equazioni:

$$
4\alpha - \beta\omega^2 A^2 = 0 \qquad \frac{\beta}{3} \cdot \frac{A^3}{4} \omega^3 = \frac{E}{3\omega}
$$

che sono soddisfatte se:

$$
A = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \qquad E = 2\alpha\omega \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}
$$

oppure se

$$
A = \frac{1}{\omega} \sqrt[3]{\frac{4E}{\beta\omega}} \qquad \alpha = \sqrt[3]{\frac{E^2\beta}{4\omega^2}}
$$

e il valore di B si ricava, come già si è detto, dalle ultime di (3). In questo caso si conclude l'esistenza di una soluzione sottoarmonica di ordine tre. Nel caso generale, come ha mostrato la MINOZZI, esprimendo la $\varphi\,(- A\omega \operatorname{sen} \omega t)$ come funzione lineare in $\operatorname{sen} r\omega t$, con r dispari e variabile da 1 ad n, la prima delle (3) si spezza nelle $\frac{n+1}{2}$ equazioni:

$$
(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{a_n A^n \omega^n}{2^{n-1} \cdot n} = \frac{E}{n\omega} \tag{5}
$$

$$
\frac{a_r A^r \omega^r}{2^{r-1} \cdot r} + \frac{a_{r+2}}{2^{r+1}} A^{r+2} \omega^{r+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1} \cdot n} \binom{n}{\frac{n-r}{2}} a_n A^n \omega^n = 0 \tag{6}
$$

dove la seconda relazione vale per r dispari, compreso fra 1 ed $n-2$, estremi inclusi. Da qui, fissati E ed a_n, si può ricavare dalla prima il valore di

$$A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\omega} \sqrt[n]{\frac{2^{n-1}E}{\omega a_n}}.$$

Le altre equazioni risultano soddisfatte scegliendo opportunamente i coefficienti $a_1, a_3 \ldots a_{n-2}$. Perciò tutti i coefficienti della $\varphi(\dot{x})$ saranno funzioni di a_n ed E. È ovvio che l'ultima della (6), dove $a_1, a_3 \ldots a_{n-2}$ siano espresse in funzione di a_n ed E, può considerarsi un'equazione algebrica di ennesimo grado in A, che ha una soluzione uguale al valore di A, ricavata dalla (5). Resta così provato che, se i coefficienti di (6) sono della forma ora indicata, esistono soluzioni sottoarmoniche semplici, di ordine n, del sistema considerato.

3. Poichè studieremo la stabilità delle soluzioni sopra trovate solo nel caso della debole non-linearità, poniamo nelle (1) $\varphi(\dot{x}) = \varepsilon\psi(\dot{x})$, dove ε è un numero che supponiamo molto piccolo. In questo caso è facile verificare che la soluzione sottoarmonica trovata coincide, a meno di termini in ε e potenze di ordine superiore, con una soluzione periodica delle (1) quando $E = 0$, che rappresenta cioè una oscillazione libera dei circuiti descritti da queste equazioni.

Per dimostrare ciò, moltiplichiamo la prima di (1) (con $E = 0$) (in cui si supponga x_1 ed x_2 espresse mediante le formule (2)) per $\operatorname{sen} \omega t$ e poi si integri da 0 a $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\int_0^T \varphi(-A\omega \operatorname{sen} \omega t) \operatorname{sen} \omega t dt = 0 \tag{7}$$

ora la (7) equivale a supporre nullo il coefficiente del termine in $\operatorname{sen} \omega t$ dello sviluppo di $\varphi(-A\omega \operatorname{sen} \omega t)$ in somme di termini in $\operatorname{sen} r\omega t$. A questa equazione, con gli $a_1, a_3 \ldots a_{n-2}$ espressi mediante E ed a_n, soddisfa, come si è detto, A.

Invece in un'oscillazione periodica di (1) con $E = 0$, x_1 vale, a meno di termine in ε, $N \cos \omega t$ dove N deve essere una soluzione della equazione [2]

$$\int_0^T \varphi(-\omega N \operatorname{sen} \omega t) \operatorname{sen} \omega t dt = 0 \tag{8}$$

[2] D. GRAFFI: *Sull'espressione delle soluzioni periodiche nei sistemi non-lineari a due gradi di libertà*, « Memoria Accademia delle Scienze »

equazione identica a (7); un valore di M coincide dunque con A. Tenendo presente le relazioni fra $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$, esposte nella memoria ora citata, si ha che a meno di termini in ε, le soluzioni sottoarmoniche coincidono con le soluzioni periodiche di (1), con $E=0$, come si è affermato poco fa.

4. Scriviamo ora le equazioni alle variazioni per il sistema (1), supposto x_1, x_2 espresse da (2); A e B hanno i valori sopra indicati. Posto in (1) in luogo di x_1 ed x_2, $x_1+\delta x_1$, $x_2+\delta x_2$ e trattando δx_1, δx_2, come infinitesimi, dette equazioni hanno la forma:

$$\begin{cases} L_1\delta\ddot{x}_1 + M\delta\ddot{x}_2 - \varepsilon\dfrac{d\psi}{dx}\delta\dot{x} + \dfrac{\delta x_1}{C_1} = 0 \\ M\delta\ddot{x}_1 + L_2\delta\ddot{x}_2 + \dfrac{\delta x_2}{C_2} = 0. \end{cases}$$

Le equazioni alle variazioni per il caso delle oscillazioni libere, hanno la stessa espressione, solo che in luogo di x_1 e x_2 bisogna porre $A\cos\omega t$, $B\cos\omega t$, sommato con termini in ε. Poichè x_1 e x_2

Istituto di Bologna, (10), X, (1952-53), pp. 39-46. Il GRAFFI considera un sistema che contiene come caso particolare il seguente, ottenuto derivando il sistema (1) e ponendo $\dot{x}_1 = y_1$, $\dot{x}_2 = y_2$:

$$\alpha)\ L\ddot{y}_1 + M\ddot{y}_2 + \varepsilon f(y_1)\dot{y}_1 + \frac{y_1}{C_1} = 0 \qquad \beta)\ L_1\ddot{y}_2 + M\ddot{y}_2 + \frac{y_2}{C_2} = 0$$

con $f(y_1) = \dfrac{d\varphi(y_1)}{dy_1}$, che ha per soluzioni $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ e dimostra poi che, a meno di termini in ε si può scrivere:

$$\dot{x}_1 = y_1 = -\omega N \operatorname{sen}\omega t$$

(in realtà il GRAFFI pone in luogo di $\operatorname{sen}\omega t$, $\cos\omega t$; ma ci si riconduce subito al nostro caso, con un cambiamento dell'istante iniziale) e che N soddisfa l'equazione:

$$\int_0^T f(-\omega N \operatorname{sen}\omega t)\cos^2\omega t\,dt = 0$$

con $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Ma, con una integrazione per parti, tale equazione si riduce a:

$$\int_0^T \varphi(-N\omega \operatorname{sen}\omega t)\operatorname{sen}\omega t\,dt = 0$$

che coincide con la (8). Ora poichè, come si ricava subito integrando la prima di (1) su un periodo, il valore medio di x_1 è dell'ordine di ε, si trae che lo sviluppo in serie FOURIER di x_1 vale $N\operatorname{sen}\omega t$, sommato con termini dell'ordine di ε, come si è affermato nel testo.

compaiono solo nel termine moltiplicato per ε, si ha che, a meno di termini in ε^2, le equazioni alle variazioni delle oscillazioni libere coincidono con quelle delle oscillazioni sottoarmoniche, e la stessa coincidenza si avrà per i rispettivi esponenti caratteristici. Ora, la stabilità delle oscillazioni libere del sistema (1) in cui $E = 0$ (in realtà per quelle ottenute derivando tale sistema, ma la questione è identica perchè gli esponenti caratteristici sono gli stessi) è stata studiata da ANDRONOW e WITT (3).

Intanto, poichè il sistema è autonomo, uno degli esponenti caratteristici è zero. ANDRONOW e WITT hanno determinato le condizioni affinchè gli altri esponenti caratteristici, determinati a meno di ε^2 e potenze superiori, siano a parte reale negativa. Se queste condizioni non sono soddisfatte, o meglio, se almeno uno degli esponenti caratteristici è a parte reale positiva, a meno di termini in ε^2, resta provato, per quanto si detto, l'instabilità delle oscillazioni sottoarmoniche per piccoli valori di ε.

Nel caso della stabilità delle oscillazioni libere, cioè quando tutti gli esponenti caratteristici (escluso quello nullo) sono a parte reale negativa, non si può affermare la stabilità delle oscillazioni sottoarmoniche, perchè l'esponente caratteristico, rigorosamente nullo nel caso delle oscillazioni libere è, nel caso delle oscillazioni sottoarmoniche, nullo solo a meno di termini dell'ordine di ε^2 e potenze superiori; perciò occorrerebbe risolvere l'equazione alle variazioni delle oscillazioni forzate, fino almeno all'approssimazione dell'ordine di ε^2. Il calcolo non si presenta affatto semplice e lo ometteremo. È da notare però, che, per $M = 0$, il COLOMBO (4) ha provato, nel caso del VAN DER POL, che quell'esponente caratteristico ha parte reale positiva per termini dell'ordine di ε^3, perciò, per continuità, sarà tale almeno per M molto piccolo. Si può dunque concludere, come si è detto in principio, che, almeno nel caso di VAN DER POL, per ε piccolo ed M piccolo, le soluzioni sottoarmoniche trovate sono instabili.

(3) ANDRONOW e WITT: *Sur la théorie mathématique des systèmes autooscillatoires à deux degrés de liberté*, « Journal of Technical Physics U. S. S. R. 1934 ». Vedi anche MINORSKY: *Non-linear Mechanics*, I. W. Edward Ann Arbor 1947 pag. 148-158.

(4) G. COLOMBO: *Sopra un singolare caso che si presenta in un problema di stabilità in meccanica non-lineare*, « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova », anno XXII 1953, pag. 123-133.