Bollettino
Unione Matematica Italiana

Delfina Roux

Lacune unilaterali, emisimmetria di tratti e teorema di Fabry.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 399–408.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_399_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Lacune unilaterali, emisimmetria di tratti e teorema di Fabry.

Nota di DELFINA ROUX (a Milano)

Sunto. - *Vengono stabiliti due criterî sufficienti perchè la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *avente raggio di convergenza* 1, *ammetta il punto* $z = 1$ *come critico (singolare). La prima di tali condizioni è analoga a quella del teorema di* FABRY-PÓLYA *riguardante le serie di potenze non prolungabili e che richiede la presenza di "lacune unilaterali" generalizzate* $n_h(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_h$ *alla sinistra (oppure* $n_h \leqq n \leqq n_h(1+\vartheta)$ *alla destra) di una successione* $\{n_h\}$ *con* $|a_{n_h}|^{1/n_h} \xrightarrow{h} 1$. *La seconda riguarda il caso in cui le lacune presentino una emisimmetria.*

1. In uno studio di G. Pólya ([1]), dedicato alle serie di potenze non prolungabili, viene stabilito un criterio sufficiente nel quale sono presi in esame tratti di coefficienti nulli, che potremmo chiamare *lacune unilaterali* per il fatto che a un estremo, anzichè al centro, si richiede la presenza di un coefficiente abbastanza grande: tali lacune possono contenere coefficienti anche non nulli, purchè abbastanza pochi. La proposizione è la seguente:

Teorema (di G. Pólya) « $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ abbia raggio di convergenza 1. Siano $\{n_h\}$ una successione crescente di indici interi positivi, $0 < \vartheta < 1$, $(I'_h) \equiv (1-\vartheta)n_h \leq m \leq n_h$, $(I''_h) \equiv n_h \leq m \leq (1+\vartheta)n_h$, $(h = 1, 2, 3 \ldots)$, tratti alla sinistra e alla destra degli indici n_h, v'_h e v''_h il numero dei coefficienti a_m non nulli rispettivamente nel tratto (I'_h) a sinistra e nel tratto (I''_h) a destra.

Consideriamo le tre relazioni di limite

$$a)\ \overline{\lim}\,|a_{n_h}|^{1/n_h} = 1, \qquad b)\ v'_h/n_h \to 0, \qquad c)\ v''_h/n_h \to 0:$$

il verificarsi simultaneo di (a) e (b) porta di conseguenza che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ non è prolungabile: lo stesso dicasi per il verificarsi simultaneo di (a) e (c) ».

L'interesse di questa generalizzazione del teorema di Fabry, ottenuta col passaggio ai tratti unilaterali, è stato posto in rilievo da G. Ricci ([2]). Nella presente Nota ci proponiamo di stabilire dei criteri che localizzino un punto critico, secondo l'ordine di idee inaugurato dal Vivanti e sviluppato fino alle ultime proposizioni di E. Fabry, nell'intento di sottoporre a condizioni sufficienti, anche qui, una successione di tratti unilaterali e possibilmente di sfruttare la loro eventuale emisimmetria ([3]).

A questo problema rispondono i due teoremi seguenti, la cui dimostrazione, anzichè appoggiarsi sul procedimento di G. Pólya, segue la linea di G. Szëgo e H. Claus ([4]), considerando opportune

([1]) G. Pólya, *Ueber gewisse notwendige Determinantenkriterien fur die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe*, « Mathematische Annalen », *99* (1928), pp. 687-706. In particolare vedi p. 703, nota ([18]).

([2]) G. Ricci, *Sulle serie di potenze prolungabili e ultraconvergenti* (in corso di pubblicazione). *Prolungabilità e ultraconvergenza delle serie di potenze. Modulazione del margine delle lacune* (in corso di pubblicazione).

[3]) G. Ricci, *Emisimmetria di tratti e teorema di Vivanti-Pringsheim. Hadamard-Fabry relativo ai punti critici*, « Bollettino U. M. I. », (3) *9*, pp. 126-135.

([4]) H. Claus. *Neue Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen*, « Mathematische Zeitschrift » *49* (1944), pp. 161-191.

successioni di polinomi; si fa anche uso della funzione intera ausiliaria introdotta da G. FABER.

TEOREMA I. - *La serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

abbia raggio di convergenza 1. *Il punto* 1 *è singolare se è possibile determinare*

a) *una successione crescente* $\{n_h\}$ *di indici interi* $n_1, n_2, \ldots$,

b) *una successione* $\{\gamma_h\}$ *di orientazioni* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$,

c) *un numero reale* $0 < \vartheta < 1$, *in guisa che si abbia:*

$$\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \qquad \{\mathrm{Re}\,(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \to 1 \quad per \quad h \to +\infty, \tag{1.2}$$

e, per il numero v_h *delle variazioni di segno di* $\mathrm{Re}\,(a_m e^{-i\gamma_h})$ *al variare di* m *nell'intervallo*

$$n_h(1-\vartheta) \leqq m \leqq n_h \tag{1.3}$$

(col trascurare gli eventuali valori nulli), risulti

$$v_h/n_h \to 0 \quad per \quad h \to +\infty. \tag{1.4}$$

Un criterio sufficiente perfettamente analogo si ottiene quando si sostituiscano ai tratti unilaterali a sinistra (1.3) *quelli unilaterali a destra*

$$n_h \leqq m \leqq n_h(1+\vartheta). \tag{1.3$'$}$$

TEOREMA II. - *La serie di potenze* f(z), *avente il raggio di convergenza* 1, *ammette il punto* 1 *come critico se è possibile determinare*

a) *due successioni crescenti di indici interi* $\{p_h\}$ *e* $\{q_h\}$ *per le quali*

$$p_h < q_h, \quad q_h - p_h > \vartheta p_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.5}$$

($\vartheta > 0$ *indipendente da* h);

b) *una successione* $\{\gamma_h\}$ *di orientazioni* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ *in modo che risulti:*

$$\mathrm{Re}\,((a_{p_h} + a_{q_h})e^{-i\gamma_h}) > 0, \qquad \{\mathrm{Re}\,((a_{p_h} + a_{q_h})e^{-i\gamma_h})\}^{1/p_h} \to 0 \quad per \quad h \to +\infty, \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,((a_{p_h+k} + a_{q_h-k})e^{-i\gamma_h}) \geqq 0 \\ 0 \leqq k \leqq (q_h = p_h)/2; \qquad h = 1, 2, 3 \ldots \end{cases} \tag{1.7}$$

2. LEMMA I. [5] - « Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad f(z, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\,(a_n e^{-i\gamma}) z^n. \tag{2.1}$$

[5] Una osservazione equivalente al punto 1) di questo Lemma I si trova in A. PRINGSHEIM, Sitzungberichte München 1928; pp. 343-358.

1) Se $f(z)$ è regolare nel punto 1, tale è anche $f(z, \gamma)$ per ogni γ.

2) Se $f(z)$ è regolare in $|z - 1/2| < R (R > 1/2)$, è ivi regolare anche $f(z, \gamma)$ e, se $R_1 < R$, risulta $|f(z, \gamma)| < K_1(R_1)$ per $|z - 1/2| \leqq R_1$ (uniformemente rispetto a γ).

3) Risulta $|f(z, \gamma)| < K_2 = K_2(\delta)$ per $|z| \leqq 1 - \delta (0 < \delta < 1)$, uniformemente rispetto a γ.

4) Nella riunione dei due dominî $|z| \leqq 1 - \delta$ e $|z - 1/2| \leqq R_1$, risulta $|f(z, \gamma)| < K (K = K(\delta, R_1))$ (uniformemente rispetto a γ) ».

Dimostrazione. – 1) Osserviamo che le serie $f(z, \gamma)$ e $f(z, \gamma + \pi/2)$ hanno i coefficienti reali ed è $|\mathrm{Re}\,(a_n e^{-i\gamma})| \leqq |a_n|$ per ogni γ; inoltre $e^{-i\gamma} f(z) = f(z, \gamma) + i f(z, \gamma + \pi/2)$.

Se sviluppiamo le funzioni rappresentate dalle tre serie nell'intorno del punto reale z_0 del raggio $0 < z_0 < 1$, la relazione

$$e^{-i\gamma} f(z_0\,;\, z) = f(z_0;\, z, \gamma) + i f(z_0;\, z, \gamma + \pi/2)$$

che lega i tre sviluppi ottenuti, sussiste lungo il raggio $0 < z < 1$ e, poichè $f(z_0, z)$ converge assolutamente in un punto *reale* $\xi > 1$, in un tale punto devono convergere separatamente le due serie (a coefficienti reali) $f(z_0; z, \gamma)$, $f(z_0; z, \gamma + \pi/2)$ e ne segue l'asserto.

2) Dall'osservazione precedente segue evidentemente il punto 2, assumendo $z_0 = 1/2$.

3) Questa affermazione è evidente poichè $|\mathrm{Re}\,(a_n e^{-i\gamma})| \leqq |a_n|$ e basta assumere $K_2(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,(1 - \delta)^n$.

4) È conseguenza di 2) e 3).

3. *I circuiti* $\mathrm{L}_0(\mathrm{d}, \alpha)$, $\mathrm{L}_\delta(\mathrm{d}, \alpha)$ *e i dominî* $\mathrm{C}(\mathrm{d}, \alpha)$, $\mathrm{C}'(\alpha)$, $\mathrm{C}''(\mathrm{d}, \alpha)$.

Sia $d > 1/2$, $0 < \alpha < \pi$; L_0 e L_δ sono i due circuiti tra loro analoghi (vedi la figura):

$$(L_0) \begin{cases} |z| = 1, & \alpha < \arg z < 2\pi - \alpha \\ 1 \leqq |z| \leqq 1 + d, & \arg z = \mp \alpha \\ |z| = 1 + d, & -\alpha < \arg z < \alpha \end{cases}$$

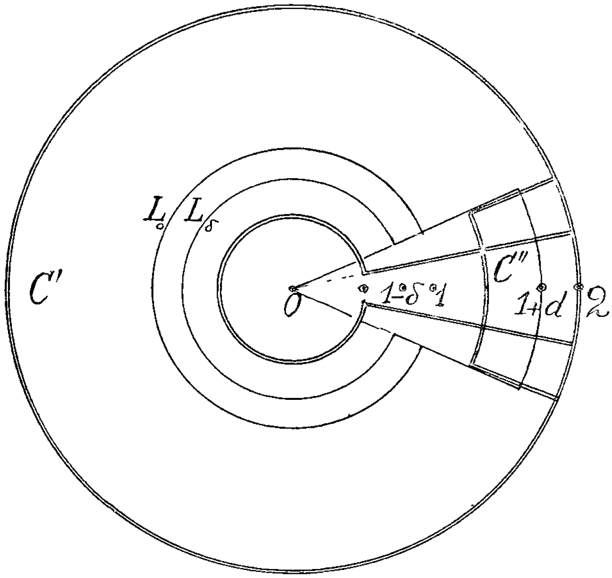
$$(L_\delta) \begin{cases} |z| = 1 - \delta, & \alpha < \arg z < 2\pi - \alpha \\ 1 - \delta \leqq |z| \leqq 1 + d, & \arg z = \mp \alpha \\ |z| = 1 + d, & -\alpha < \arg z < \alpha. \end{cases}$$

Il dominio $C'(\alpha)$ è (vedi la figura)

$$1/2 \leqq |z| \leqq 2, \quad \alpha/2 \leqq \arg z \leqq 2\pi - \alpha/2$$

Il dominio $C''(d, \alpha)$ è

$$1 + d/2 \leqq z \leqq 2, \quad -\alpha \leqq \arg z \leqq \alpha.$$



Il dominio $C(d, \alpha)$ è quello che risulta dalla riunione di $C'(\alpha)$ e $C''(d, \alpha)$. $C(d, \alpha)$ contiene il circuito L_0 e, per $\delta < 1/2$, anche L_δ, come strettamente interni.

4. LEMMA II. (6) – « Fissati α e δ, è possibile determinare due successioni di polinomi in $1/z$, a coefficienti reali positivi:

$$(4.1) \qquad \begin{aligned} P_n\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^n} + \frac{c_{n,1}}{z^{n-1}} + \dots + \frac{c_{n,m_n}}{z^{n-m_n}} \\ Q_n\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^{n-m_n}} + \frac{c_{n,1}}{z^{n-m_n+1}} + \dots + \frac{c_{n,m_n}}{z^n} \end{aligned} \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$

($m_n = n - \dfrac{k(n-r)}{p}$; p, k interi. $p > k > 0$; r resto della divisione n/p) e due numeri reali

$$(4.2) \qquad 0 < \Theta = \Theta(d, \alpha) < 1, \qquad 0 < \delta = \delta(d, \alpha) < d$$

(6) Questo Lemma si trova sostanzialmente in H. CLAUS, loc. cit. in (4). Qui si dimostra in modo un po' diverso, allo scopo di dare infoimazioni sul segno dei coefficienti e sul legame fra i coefficienti di $P_n(1/z)$ e $Q_n(1/z)$, per sfruttare la emisimmetria.

tali che, per $n \geqq n_0 = n_0(d, \alpha)$, si abbia:

(4.3) $$| P_n(1/z) | < \Theta^n, \; | Q_n(1/z) | < \Theta^n,$$

per z su L_δ ».

Dimostrazione. - La funzione

$$1/(1-u) = 1 + u + u^2 + \ldots$$

ammette come stella con centro nell'origine l'intero piano, privato della semiretta reale $u > 1$.

Diciamo $R'(\alpha)$ il dominio nell'u-piano ottenuto con una traslazione $u = z + 1$ del dominio $C'(\alpha)$ dello z-piano. Un noto teorema di Mittag-Leffler [7] assicura che esiste un polinomio a coefficienti reali positivi

$$B(u) = b_1 + b_2 u + \ldots b_k u^{k-1} \qquad k = k(\alpha)$$

tale che si abbia

$$| B(u) - 1/(1-u) | < 1/2$$

per ogni u di $R'(\alpha)$. Quindi, ponendo $u = z + 1$, abbiamo:

$$B(u) = A(z) = \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu (z+1)^{\nu-1} = \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu z^{\nu-1};$$

i coefficienti c_ν risultano positivi ed essendo $1/(1-u) = -1/z$, abbiamo, per ogni z in $C'(\alpha)$:

(4.4) $$| A'(z) | = | A(z) - 1/z | = | 1/z + c_1 + c_2 z + \ldots c_k z^{k-1} | < 1/2.$$

Inoltre, poichè la regione $C'(\alpha)$ viene mutata in sè stessa dalla trasformazione $z' = 1/z$, si avrà anche, per ogni z in $C'(\alpha)$:

(4.4)′ $$| A''(z) | = | z + c_1 + c_2/z + \ldots + c_k/z^{k-1} | < 1/2.$$

Consideriamo ora il dominio $C''(d, \alpha)$ (esterno al cerchio $|z| \leq 1$) e poniamo $\max | A'(z) | = H_1 = H_1(d, \alpha)$; $\max | A''(z) | = H_2 = H_2(d, \alpha)$, per $z \in C''(d, \alpha)$. Osserviamo che in $C''(d, \alpha)$ è $|z| \geqq 1 + d/2$; posto allora $H = \max(H_1, H_2)$ si può quindi determinare un intero m_1 in guisa da avere $(1 + d/2)^{m_1} > 2H$ e allora risulta

$$\left| \frac{1}{z^{m_1}} A'(z) \right| < \frac{1}{2}, \; \left| \frac{1}{z^{m_1}} A''(z) \right| < \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad z \in C''(d, \alpha).$$

[7] Mittag-Leffler, Acta mathematica *23* (1900), pag. 59.

Fissato allora un intero positivo $p \geqq m_1 + k$, moltiplicando $A'(z)$ e $A''(z)$ rispettivamente per $1/z^{p-1}$, $1/z^{p-k+1}$, si ottengono i polinomi

$$\frac{1}{z^{p-1}} A'(z) = P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^p} + \frac{c_1}{z^{p-1}} + \dots + \frac{c_k}{z^{p-k}}$$

$$\frac{1}{z^{p-k+1}} A''(z) = Q\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{c_k}{z^p} + \frac{c_{k-1}}{z^{p-1}} + \dots + \frac{c_1}{z^{p-k+1}} + \frac{1}{z^{p-k}}$$

che soddisfano le disuguaglianze

$$|P(1/z)| < 1/2, \quad |Q(1/z)| < 1/2 \quad (z \in L_0)$$

lungo il circuito L_0. Infatti queste valgono in $C''(d, \alpha)$ e, per le (4.4), anche lungo la parte di L_0 esterna a $C''(d, \alpha)$, poichè lungo essa è $|z| \geqq 1$ e si può perciò dividere le (4.4) per qualsiasi potenza di z.

Per la continuità di $P(1/z)$ e $Q(1/z)$ in $C(d, \alpha)$ possiamo scegliere $\delta = \delta(d, \alpha)$ abbastanza piccolo (e in ogni caso minore di 1/2) in guisa da avere

$$|P(1/z)| < 3/4, \quad |Q(1/z)| < 3/4 \quad (z \in L_\delta). \tag{4.5}$$

Ora, per ogni $n = pl + r$ $(0 \leqq r < p)$ poniamo:

$$P_n\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^r} P^l\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n} + \frac{c_{n,1}}{z^{n-1}} + \dots + \frac{c_{n,m_n}}{z^{n-m_n}}$$

$$Q_n\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^r} Q^l\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^{n-m_n}} + \frac{c_{n,1}}{z^{n-m_n+1}} + \dots + \frac{c_{n,m_n}}{z^n}$$

$$(m_n = (p-k)l + r = (p-k)(n-r)/p + r = n - k(n-r)/p).$$

Veniamo ora a maggiorare questi polinomi lungo L_δ. Per $z \in L_\delta$, risulta $|z| \geqq 1 - \delta$ e quindi, posto $1/(1-\delta)^{p-1} = M = M(d, \alpha)$, risulta $1/z^r \leqq M$ e quindi, per le (4.5):

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leqq M\left(\frac{3}{4}\right)^l \leqq \left\{\frac{3}{4} M^{1/l}\right\}^l \leqq \left(\frac{4}{5}\right)^{l+1} \leqq \left(\frac{4}{5}\right)^{n/p} = \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{1/p}\right)^n$$

e vale di conseguenza la (4.3), con $\Theta = (4/5)^{1/p}$, $p = p(d, \alpha)$.

In modo analogo si ricava che anche i polinomi $Q_n(1/z)$ soddisfano alla stessa limitazione.

5. Dimostrazione del teorema I. Lacune unilaterali a sinistra.

Consideriamo quegli indici n dei tratti $n_h(1 - \Im) \leqq n \leqq n_h$ (compreso l'ultimo intero n_h) tali che $\mathrm{Re}\,(a_n e^{-i\gamma_h})$ presenta una variazione di segno rispetto all'analoga parte reale non nulla che la precede; ordiniamo tali indici n in una successione crescente e diminuiamo ciascun indice di 1/2: indichiamo con $r_1, r_2 \ldots, r_m, \ldots$ i numeri $n - \frac{1}{2}$ così ottenuti.

Consideriamo il prodotto

$$g(z) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^2/r^2_m) \tag{5.1}$$

Esso gode le seguenti proprietà (che sono ovvie se gli r_m sono in numero finito mentre seguono dal fatto che $m/r_m \to 0$ se gli r_m sono in numero infinito) [8]:

a) $g(z)$ è una funzione intera;

b) vale la seguente relazione:

$$\varliminf_{h \to \infty} |g(n_h)|^{1/n_h} \geqq 1; \tag{5.2}$$

c) se il punto $z = 1$ non è critico per l'elemento analitico $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, non è critico neppure per

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(n) z^n.$$

6. Scegliamo d e α abbastanza piccoli in guisa che la parte di L_δ esterna al cerchio $|z| \leqq 1$ sia interna al cerchio $|z - 1/2| \leqq R_1$.

Assumiamo δ abbastanza piccolo in guisa da avere $\delta < 1 - \Theta^{\vartheta}$, cioè

$$\Theta^{\vartheta}/(1 - \delta) < 1. \tag{6.1}$$

Per il Lemma I, si ha

$$|F(z, \gamma)| < K(\delta, R_1) \tag{6.2}$$

γ reale qualsiasi, z su L_δ.

Poniamo per semplicità di scrittura $t_h = [\vartheta n_h]$; la funzione $F_h(z, \gamma_h) \cdot P_{t_h}(1/z)$ è una funzione avente come unico punto singolare all'interno di L_δ un polo nell'origine e il coefficiente del termine in $z^{n_h - t_h}$ è

$$C_h = g(n_h) \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) + c_{t_h,1} g(n_h - 1) \operatorname{Re}(a_{n_h - 1} e^{-i\gamma_h}) + \ldots +$$
$$+ c_{t_h, m_{t_h}} g(n_h - m_{t_h}) \operatorname{Re}(a_{n_h - m_{t_h}} e^{-i\gamma_h})$$

(8) E. Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktiontheorie*, Berlin, 1929, pp. 78-82).

e questo coefficiente è assegnato dall'integrale

$$J_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\delta} F_h(z, \gamma_h)P_{t_h}\left(\frac{1}{z}\right)z^{t_h - n_h - 1}\,dz\,.$$

Ma la successione di uguaglianze $C_h = J_h (h = 1, 2 \ldots)$ è assurda. Infatti, denotando con l_δ la lunghezza di L_δ, risulta, per h abbastanza grande, grazie alle (6.2) e (4.3):

$$|J_h| \leqq \frac{l_\delta}{2\pi}\,\frac{K\Theta^{t_h}}{(1-\delta)^{n_h - t_h + 1}} < \frac{K l_\delta}{2\pi}\,\frac{\Theta^{t_h}}{(1-\delta)^{n_h+1}} \tag{6.3}$$

e quindi, per la (6.1):

$$\overline{\lim_{h\to\infty}}\, |J_h|^{1/n_h} \leq \frac{\Theta^{\vartheta}}{1-\delta} < 1.$$

Consideriamo ora C_h. Per il modo con cui è stata costruita la funzione $g(z)$ ed essendo i coefficienti di $P_{t_h}(1/z)$ positivi, tutti i termini che compaiono in C_h hanno lo stesso segno.

Segue, per le (1.2) e (5.2):

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{h\to\infty}}\, |C_h|^{1/n_h} &\geqq \overline{\lim_{h\to\infty}}\, |g(n_h)\,\mathrm{Re}\,(a_{n_h}e^{-i\gamma_h})|^{1/n_h} \\ &\geqq \underline{\lim_{h\to\infty}}\, |g(n_h)|^{1/n_h} \cdot \overline{\lim_{h\to\infty}}\, |\mathrm{Re}\,(a_{n_h}e^{-i\gamma_h})|^{1/n_h} \\ &\geqq 1.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Le (6.3) e (6.4) non sono compatibili.

Segue che $z = 1$ è punto critico per $F_h(z, \gamma_h)$ e quindi anche per $f(z)$.

7. Lacune unilaterali a destra. Per dimostrare il TEOREMA I con la condizione lacunare destra, si procede in modo analogo, mediante l'ausilio dei polinomi della successione $\{Q_n(1/z)\}$ e mediante la funzione intera $g(z)$ costruita prendendo in considerazione i tratti $n_h \leqq n \leqq (1+\vartheta)n_h$.

8. Dimostrazione del teorema II. Posto $u_h = q_h - p_h$, consideriamo la funzione $f_h(z, \gamma_h) \cdot Pu_h(1/z)$ (dove $f_h(z, \gamma_h)$ è definita come in (2 · 1)). Il coefficiente del termine in z^{p_h} è

$$C'_h = \mathrm{Re}\,(a_{q_h}e^{-i\gamma_h}) + c_{u_h,1}\mathrm{Re}\,(a_{q_h-1}e^{-i\gamma_h}) + \ldots + c_{u_h,\,m_{u_h}}\mathrm{Re}\,(a_{q_h - m_{u_h}}e^{-i\gamma_h})$$

ed è assegnato dall'integrale

$$J'_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\delta} f_h(z, \gamma_h)P_{u_h}(1/z)z^{-(p_h+1)}\,dz\,.$$

Consideriamo ora la funzione $f_h(z, \gamma_h) \cdot Q_{u_h}(1/z)$.

Il coefficiente del termine in $z^{p_h - m_{u_h}}$ è

$$C_h = \mathrm{Re}\,(a_{p_h} e^{-i\gamma_h}) + c_{u_h,1} \mathrm{Re}(a_{p_h+1} e^{-i\gamma_h}) + \ldots + c_{u_h, m_{u_h}} \mathrm{Re}(a_{p_h + m_{u_h}} e^{-i\gamma_h})$$

ed è assegnato dall'integrale

$$J''_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\delta} f_h(z, \gamma_h) Q_{u_h}(1/z) z^{m_{u_h} - p_h - 1} dz .$$

Segue

$$C'_h + C''_h = J_h + J''_h \qquad (h = 1, 2, 3 \ldots).$$

Ma questa successione di uguaglianze è assurda.

Infatti, per h abbastanza grande, si ha

$$|J'_h + J''_h| \leqq |J'_h| + |J''_h| < \frac{l_\delta}{2\pi} \left\{ \frac{\Theta^{u_h}}{(1-\delta)^{p_h+1}} + \frac{\Theta^{u_h}}{(1-\delta)^{p_h - m_{u_h} + 1}} \right\} <$$
$$< \frac{l_\delta}{2\pi} \frac{\Theta^{u_h}}{(1-\delta)^{p_h+1}}$$

e quindi

$$\text{(8.1)} \qquad \overline{\lim_{h\to\infty}} |J'_h + J''_h|^{1/p_h} \leqq \overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\Theta^{u_h/p_h}}{(1-\delta)^{1+1/p_h}} \leqq \frac{\Theta^{\vartheta}}{1-\delta} < 1.$$

Ma d'altra parte per l'espressione $C'_h + C''_h$ abbiamo:

$$C_h' + C_h'' = \mathrm{Re}\,((a_{p_h} + a_{q_h}) e^{-i\gamma_h}) + c_{u_h,1} \mathrm{Re}\,((a_{p_h+1} + a_{q_h-1}) e^{-i\gamma_h}) + \ldots$$
$$\ldots + c_{u_h, m_{u_h}} \mathrm{Re}\,((a_{p_h + m_{u_h}} + a_{q_h - m_{u_h}}) e^{-i\gamma_h})$$

ed essendo i coefficienti $c_{u_h, i} (h = 1, 2, 3 \ldots ; i = 1, 2 \ldots m_{u_h})$ tutti positivi, tenendo conto delle ipotesi fatte (vedi (1.7)):

$$\text{(8.2)} \qquad \overline{\lim_{h\to\infty}} | C_h' + C_h'' |^{1/p_h} \geqq \lim_{h\to\infty} | \mathrm{Re}\,((a_{p_h} + a_{q_h}) e^{-i\gamma_h}) |^{1/p_h} \geqq 1.$$

Le (8.1) e (8.2) non sono compatibili. Segue che $z = 1$ è punto critico per $f_h(z, \gamma_h)$ e quindi anche per $f(z)$.