Carmelo Longo

Fasci di complessi lineari di rette in S_5.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 381–385.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_381_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Fasci di complessi lineari di rette in S_5.

Nota di CARMELO LONGO (a Roma)

Sunto. - *Vedi il n. 1.*

1. - Nella presente Nota si perviene in modo elementare alla classificazione dei fasci di complessi lineari di rette di uno spazio proiettivo complesso S_5 (1), riducendo il problema alla classificazione dei fasci di reciprocità tra due piani totali per i complessi del fascio. In particolare si scrivono le equazioni canoniche dei vari tipi di fascio (2).

Nello stesso ordine di idee si dà (n. 3) un nuovo metodo per la riduzione a forma canonica dell'equazione di un complesso lineare di rette di tipo generale, in S_{2r+1}, dopo aver determinato (n. 2) la dimensione massima degli spazi totali e dimostrato l'esistenza di due tali spazi sghembi tra loro.

2. - Indicate con x^i $(i = 0, \dots, n)$ le coordinate di un punto di uno spazio proiettivo complesso S_n e con p^{ik} le coordinate plükeriane di retta, sia

$$a_{ik}p^{ik} = 0 \tag{2.1}$$

l'equazione di un *complesso lineare di rette.*

Le rette del complesso passanti per un punto $P(y^i)$ costituiscono una stella appartenente all'*iperpiano polare*

$$a_{ik}x^iy^k = 0 \tag{2.2}$$

il quale è indeterminato se e solo se il punto P è un *centro* del complesso. Supposto che il complesso non ammetta centri *(complesso di tipo generale)* ossia che si abbia

$$\mathrm{Det} \cdot | a_{ik} | \neq 0$$

si ha necessariamente $n = 2r + 1$.

(1) La determinazione dei vari tipi si trova già in: E. V. WEBER, *Theorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen*, « Math. Annalen » 55 (1901), 386-440. Si veda anche, G. FANO, *Reti di complessi lineari dello spazio* S_5 *aventi una rigata asssegnata di rette-centri*, Rend. Lincei, XI, (1930), 227-232.

(2) Di tali equazioni ho avuto bisogno nella classificazione di alcuni tipi di complessi lineari di piani in S_8.

Le rette del complesso appartenenti ad un dato S_h costituiscono ancora un complesso lineare di rette, che si dirà *complesso traccia* determinato dallo S_h, a meno che lo S_h sia *totale*, cioè sia tale che ogni sua retta appartiene al complesso.

In particolare lo S_h, $x^{h+1} \ldots = x^n = 0$, è totale se e solo se

$$a_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 0, \ldots, h).$$

Dimostriamo che:

Gli spazi totali di dimensione massima di un complesso lineare L *di rette, di tipo generale, in* S_{2r+1} *sono* S_r *e dipendono da* $(r+1)(r+3)/2$ *parametri* (3).

Poichè il teorema è vero per $r = 1$, lo possiamo dimostrare per induzione.

Per questo osserviamo che l'iperpiano polare $S_{2r}^{(P)}$ relativo ad un punto P determina un complesso traccia avente P come centro: questo complesso è perciò costituito dalle rette dei piani congiungenti P con le rette del complesso traccia $\bar{L}$ determinato da un generico S_{2r-1} di $S_{2r}^{(P)}$. Gli spazi totali di dimensione massima passanti per P e relativi al complesso L sono perciò gli spazi congiungenti P con gli spazi totali S_{r-1} di dimensione massima e relativi al complesso $\bar{L}$. Ne segue, come è subito visto, il teorema.

Inoltre da quanto precede si ha anche che:

Due generici S_r *totali sono sghembi tra loro.*

3. – Dall'ultima proprietà del n. precedente segue immediatamente la riduzione a forma canonica dell'equazione (2.1) del complesso.

Per questo cominciamo ad osservare che scelti lo $S_r^{(1)}$, $x^{r+1} = \ldots = x^{2r+1} = 0$, e lo $S_r^{(2)}$, $x^0 = \ldots = x^r = 0$, come totali, l'equazione del complesso si riduce a

$$a_{\alpha\rho} p^{\alpha\rho} = 0 \qquad (\alpha = 0, \ldots, r;\ \rho = r+1, \ldots, 2r+1). \tag{3.1}$$

Indicata poi con x^α le coordinate di un punto di $S_r^{(1)}$ e con y^ρ quelle di un punto di $S_r^{(2)}$, si ha che una retta incidente i due prece-

(3) Per altre dimostrazioni della precedente proprietà e per la costruzione geometrica degli spazi totali si veda p. es.: F. PALATINI, *Sui complessi lineari di rette negli iperspazi* « Gior. Battaglini », 41 (1903), 85-96; E. BOMPIANI, *Preliminari di geometria negli iperspazi*, Lezioni policopiate, Ist. Mat. Univ. Roma (1952-53), pp. 59-68.

denti S_r appartiene al complesso se e solo se

$$a_{\alpha\rho} x^\alpha y^\rho = 0. \tag{3.2}$$

L'equazione precedente, data la $x^\alpha(y^\rho)$ rappresenta lo S_{r-1} intersezione di $S_r^{(2)}(S_r^{(1)})$ con l'iperpiano polare di $x^\alpha(y^\rho)$ rispetto al complesso e la riduzione a forma canonica del complesso equivale alla riduzione a forma canonica della correlazione (3.2).

Si ottiene così la nota *equazione canonica* del complesso

$$\sum_{\alpha=0}^{r} p^{\alpha,\, r+\alpha+1} = 0. \tag{3.3}$$

4. – Considerato ora il *fascio di complessi lineari di rette* in $S_5(r=2)$

$$(\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}) p^{ik} = 0 \qquad (i,\, k = 0,\, 1, \ldots,\, 5) \tag{4.1}$$

da quanto si è detto al n. 2 segue facilmente che due generici tra gli ∞^3 piani totali per i complessi del fascio sono sghembi tra loro. Ne segue che indicati con π_1 e π_2 due tali piani e supposto che questi abbiano rispettivamente le equazioni, $x^0 = x^1 = x^2 = 0$ ed $x^3 = x^4 = x^5 = 0$, con le stesse notazioni del n. precedente, si ha che il problema della riduzione a forma canonica del fascio (4.1), è equivalente a quello della riduzione a forma canonica del fascio di correlazioni

$$(\lambda a_{\alpha\rho} + \mu h_{\alpha\rho}) x^\alpha y^\rho = 0 \qquad (\alpha = 0,\, 1,\, 2\,;\ \rho = 3,\, 4,\, 5). \tag{4.2}$$

Si possono presentare i seguenti casi secondo che nel precedente fascio:

A) non vi sono correlazioni doppiamente degeneri;

B) vi è una sola correlazione doppiamente degenere;

C) tutte le correlazioni sono doppiamente degeneri.

Ciascuno dei due casi *A*) e *B*) dà origine poi a due sottocasi secondo che tutte le correlazioni sono degeneri o no.

Si osservi che ad una correlazione semplicemente degenere corrisponde nel fascio (4.1) un complesso con una retta luogo di centri incidente π_1 e π_2 nei *punti singolari* della correlazione; e viceversa. Analogamente, ad una correlazione doppiamente degenere corrisponde un complesso con un S_3 luogo di centri incidente π_1 e π_2 nelle due rette luogo dei punti singolari della correlazione; e viceversa.

5. – Esaminiamo ora i vari tipi di fasci (4.1) che si possono presentare nel caso *A*). Se le correlazioni del fascio (4.2) non sono tutte degeneri, questo determina tra i due piani π_1 e π_2 una trasformazione quadratica (tr. q.) e si possono presentare i seguenti casi:

I. – La tr. q. è di tipo generale: nel fascio (4.2) vi sono tre correlazioni (semplicemente) degeneri. Supposto che queste corrispondano rispettivamente ai valori $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\lambda + \mu = 0$, è subito visto che l'equazione del fascio di complessi si può ridurre alla equazione canonica

$$\lambda(p^{14} + p^{25}) + \mu(p^{03} + p^{25}) = 0.$$ (4)

II. – La tr. q. ha due punti fondamentali coincidenti: nel fascio (4.2) due delle tre correlazioni (semplicemente) degeneri coincidono. Per il fascio (4.1) si ha l'equazione canonica:

$$\lambda(p^{14} + p^{25}) + \mu(p^{04} + p^{23}) = 0.$$

III. – La tr. q. ha i tre punti fondamentali coincidenti: le tre correlazioni degeneri del fascio (4.2) coincidono. Per il fascio (4.1) si ha l'equazione canonica

$$\lambda(p^{14} + p^{25}) + \mu(p^{04} + p^{15} + p^{23}) = 0.$$

Se poi tutte le correlazioni del fascio (4.2) sono (semplicemente) degeneri si hanno i due seguenti casi:

IV. – I punti singolari, in ciascuno dei due piani π_1 e π_2, appartengono ad una retta. Per il fascio (4.1) si ha l'equazione canonica:

$$\lambda(p^{14} + p^{25}) + \mu(p^{04} + p^{23}) = 0.$$

V. – I punti singolari, in uno dei due piani, coincidono (nell'altro piano appartengono ad una conica). Si ha l'equazione canonica:

$$\lambda(p^{14} + p^{25}) + \mu(p^{15} + p^{23}) = 0.$$

6. – Nel caso *B*) si possono presentare i seguenti casi:

VI. – Delle tre correlazioni degeneri due coincidono con la correlazione doppiamente degenere. Per il fascio (4.2) si ha l'equazione canonica:

$$\lambda p^{03} + \mu(p^{14} + p^{25}) = 0.$$

VII. – Non vi sono correlazioni degeneri all'infuori di quella doppiamente degenere. Si l'equazione canonica:

$$\lambda p^{03} + \mu(p^{04} + p^{15} + p^{23}) = 0.$$

(4) Nelle già citate Lezioni di E. Bompiani, è data la costruzione geometrica di questo fascio ed è messo in evidenza che la corrispondenza che si determina tra i punti di un piano totale e i punti d'intersezione dei loro S_3 polari con un altro piano totale è una corrispondenza quadratica.

Se poi tutte le correlazioni sono degeneri si hanno i due seguenti casi:

VIII. - I punti singolari in uno dei due piani coincidono, mentre nell'altro piano appartengono ad una retta. Si ha l'equazione canonica:

$$\lambda p^{13} + \mu(p^{14} + p^{25}) = 0.$$

IX. - Sia nell'uno che nell'altro piano i punti singolari coincidono. Si ha l'equazione canonica:

$$\lambda p^{24} + \mu(p^{14} + p^{25}) = 0.$$

7. - Infine il caso *C*) dà origine ai due seguenti casi:

X. - In ciascuno dei due piani le rette singolari formano fascio. Si ha l'equazione canonica:

$$\lambda p^{14} + \mu p^{25} = 0.$$

XI. - In uno dei due piani le rette singolari coincidono. Si ha l'equazione canonica:

$$\lambda p^{15} + \mu p^{25} = 0.$$