UMI

Recensioni.

* E. Bompiani, Preliminari di geometria iperspaziale, Istituto Matematico, Roma, 1953 (Beniamino Segre)
* F. G. Tricomi, Equazioni differenziali, II ed., Einaudi, 1953 (Luigi Amerio)
* K. Mayrhofer, Inhaslt und Mass, Springer-Verlag, Wien, 1952 (Giovanni Cimmino)
* T. Von Kàrman, M. A. Biot, Metodi matematici nell'ingegneria, Einaudi, 1951 (Paolo Dore)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.3, p. 327–331.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_327_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

RECENSIONI

E. BOMPIANI, *Preliminari di geometria iperspaziale*, Roma, Istituto Matematico, 1953 (ediz. ciclostil.), pp. IV + 200.

Queste lezioni, tenute presso l'Università di Roma durante l'anno accademico 1952-53, vanno segnalate per la freschezza e limpidità della trattazione, e per l'originale presentazione di argomenti ormai classici. Gli spazi e gli enti geometrici considerati vengono ivi introdotti con l'uso delle coordinate, definite per lo più nel campo reale, svincolandosi poi dalla scelta di quelle a mezzo di opportune argomentazioni gruppali. Gli sviluppi analitici prevalgono quindi su quelli sintetici, e raggiungono talora un livello assai elevato, senza che ciò peraltro venga mai a nuocere alla semplicità dell'esposizione; l'A. riesce invero a superare difficoltà algoritmiche considerevoli usufruendo di notazioni sagaci ed adeguate, sì da conformarsi sempre nel modo migliore alle finalità didattiche dell'opera e non senza l'apporto di sostanziali contributi.

Il primo dei dieci capitoli nei quali il volume è diviso tratta dello spazio affine, pervenendo rapidamente alle prime nozioni sul parallelismo e sui volumi. Il cap. II introduce lo spazio proiettivo coi suoi spazi subordinati e relative coordinate grassmanniane; è da rilevare l'analisi approfondita delle relazioni a tre termini fra queste ultime, giustificata da ciò che tali relazioni notoriamente non bastano in generale da sole a caratterizzare le suddette coordinate. Nel cap. III vengono anzitutto definiti gli spazi congiungente ed intersezione di due spazi subordinati, assegnando poi in forma compatta le condizioni analitiche affinchè essi si appartengano; si passa quindi ai primi sviluppi sui complessi lineari di spazi, fino ad ottenere le condizioni analitiche relative ad uno spazio centrale e ad uno spazio totale, e si definiscono anche gli spazi totali e pseudototali di un sistema lineare di complessi.

Tali considerazioni vengono poscia approfondite nell'ampio ed organico cap. IV, limitatamente al caso dei complessi di rette. Per questi vengono studiate le relazioni fra spazio singolare (luogo dei centri) e spazi totali, nonchè quelle fra questi ultimi e la polarità definita dal complesso, deducendone una costruzione degli spazi totali massimi ed una forma canonica per l'equazione di un complesso lineare generale di rette. L'introduzione delle coppie di rette coniugate rispetto al complesso, e l'uso di un opportuno simbolismo, permette di giungere ad una nitida determinazione analitica degli spazi totali. Tale simbolismo fornisce una comoda rappresentazione del pfaffiano relativo ad una matrice quadrata emisimmetrica d'ordine pari, e si dimostra utilissimo anche nel seguito, permettendo fra l'altro una semplice determinazione analitica esplicita dello spazio singolare di un complesso (quando esiste), ed uno studio approfondito della totalità degli spazi singolari dei complessi di un sistema lineare, con speciale riguardo al caso dei fasci. Segue un'elegante costruzione di un fascio generale di complessi di rette di S_{2r-1}, determinato assegnando le sue r rette singolari e l'S_{2r-3} polare di un punto generico, ed una riduzione a forma canonica per l'equazione del fascio. Il capitolo si chiude con uno studio accurato dei fasci di complessi lineari di rette in S_{2r-1}, nell'ipotesi che ciascuno di questi sia singolare di 1ª specie, includente la determinazione della superficie luogo delle ∞^1 rette singolari e di una forma canonica per l'equazione del fascio, come pure della curva luogo dei centri dei complessi di rette di un fascio generale in S_{2r}.

Il cap. V tratta dei complessi lineari di piani in S_5, con la distinzione fra complessi generali e singolari, e la classificazione dei primi in non speciali e speciali. Notevole è la semplicità con la quale, nel caso generale, si ottengono i cosidetti cardini (distinti o coincidenti) e l'equazione ridotta del complesso costruendo quindi gli ∞^8 piani del complesso.

I capitoli VI, VII e VIII espongono le proprietà salienti delle omografie e reciprocità fra spazi rispettivamente distini o sovrapposti, incluse le relative costruzioni ed equazioni canoniche e lo studio dei casi degeneri (si tenga presente che, a p. 120, vien denotata con A^{-1} la matrice avente ordinatamente per elementi gli elementi reciproci di quelli di una matrice A non degenere, e non — come si fa di solito — la trasposta di quella). Va specialmente rilevato il modo suggestivo col quale sono ottenute le equazioni canoniche di una omografia fra spazi sovrapposti, e la caratterizzazione proiettiva di questa mediante invarianti algebrici ed aritmetici.

Gli ultimi due capitoli sono dedicati allo studio delle quadriche negli iperspazi. Il cap. IX tratta della polarità rispetto ad una quadrica, dei casi di specializzazione, delle equazioni canoniche (sia nel campo reale che nel campo complesso), degli spazi massimi giacenti su di una quadrica non degenere e della relativa distribuzione in sistemi. Questi sistemi e la loro rappresentazione birazionale vengono approfonditi dal punto di vista algebrico nel cap. X, il quale — attraverso ad un'analisi assai elaborata — mette in luce un'interessante connessione fra la teoria di tali sistemi e quella delle matrici emisimmetriche.

La lettura del volume non presuppone che poche nozioni elementari di algebra e geometria analitica, ed è resa gradevole dall'esposizione sempre piana, scorrevole e curata nei particolari più minuti. Essa è però in qualche punto appesantita da oscurità nelle formule, dovute ad imperfezioni della riproduzione ciclostilata; mancano inoltre del tutto indicazioni bibliografiche e riferimenti a questioni ulteriori.

BENIAMINO SEGRE

F. G. TRICOMI, *Equazioni differenziali*, II ed., Einaudi, 1953.

La seconda edizione di questo libro segue a breve distanza la prima, che ha avuto un ottimo successo tra un vasto pubblico, e non solo di matematici. Pur mantenendo inalterate sostanzialmente le linee generali dell'esposizione, l'A. vi ha introdotte notevoli aggiunte (particolarmente nel Cap. II) e miglioramenti.

Il libro consta di cinque capitoli. Nel Cap. I sono dimostrati, col classico metodo di Peano-Picard, i teoremi di esistenza e unicità per le equazioni in forma normale; sono poi fatte applicazioni ai sistemi delle funzioni circolari ed ellittiche, in modo da desumere direttamente la periodicità di tali funzioni. Il Cap. II è dedicato ad argomenti ormai classici nella « Meccanica non lineare »: si studia il sistema $x' = X(x, y)$, $y' = Y(x, y)$ nell'indirizzo di Poincaré: sono classificati i « punti singolari » ed è descritto l'andamento delle linee integrali nell'intorno di questi; si passa poi allo studio in grande, con le nozioni di « ciclo limite » e la ricerca di soluzioni periodiche nello spazio delle fasi (argomento al quale è dedicato, tra l'altro, una ricerca del Tricomi stesso). Il Cap. III tratta i problemi ai limiti per le equazioni lineari del secondo ordine: teoremi generali, teorema di De La Vallée Poussin sulla distanza di due zeri consecutivi di un integrale, teoremi di Sturm, autovalori e autofunzioni e loro dipendenza dai coefficienti dell'equazione, legami con le equazioni integrali. Il Cap. IV concerne il comportamento asintotico degli integrali: contiene, tra l'altro, i teoremi di Guido Ascoli e di Poincaré sul comportamento asintotico degli integrali, espressioni asintotiche degli autovalori e delle autofunzioni, con particolare riguardo ai polinomi di Laguerre e di Legendre per grandi valori dell'indice. Il Cap. V tratta la teoria delle equazioni differenziali nel campo complesso: teoremi di esistenza (col metodo delle funzioni maggioranti), equazioni lineari, caso di Fuchs, equazione ipergeometrica. A questi argomenti si aggiungano i meno consueti: studio dei punti singolari essenziali, integrazione asintotica, applicazioni alle funzioni di Bessel e alle funzioni ipergeometriche confluenti (per le quali sono noti i pregevoli risultati del Tricomi).

In complesso il Tricomi ha tracciato una limpida teoria delle equazioni differenziali, avendo di mira principalmente l'integrazione qualitativa dei sistemi e il comportamento asintotico degli integrali. Poichè Egli è riuscito egregiamente in tale scopo e poichè si tratta di questioni della massima importanza nella teoria e nelle applicazioni, non vi è dubbio che il libro del Tricomi sarà utilissimo ad una assai larga categoria di studiosi.

LUIGI AMERIO

K MAYRHOFER, *Inhalt und Mass*, Wien, Springer-Verlag, 1952.

Questa eccellente trattazione, che riuscirà molto utile a chiunque voglia approfondire la teoria delle funzioni additive di insieme, ha già incontrato un ottimo successo in Italia presso gli specialisti dell'argomento.

L'opera è divisa in sei capitoli. Nel primo, che svolge una teoria generale dell'estensione e della misura per gli insiemi astratti, viene presa come punto di partenza la nozione di « corpo di insiemi », cioè una famiglia di insiemi, nella quale si possano sempre eseguire le operazioni di somma, prodotto e differenza di due insiemi. Una « estensione » sarà una funzione additiva non negativa $i(A)$ degli insiemi A di un corpo, nulla se A è vuoto. In particolare, una estensione potrà essere « completamente » additiva, e in tal caso, se il corpo di insiemi sul quale essa è definita è un « σ-corpo », cioè contiene sempre l'insieme somma di una successione di insiemi in esso contenuti, si dirà una « misura ». Da ogni definizione di estensione, o misura, si ricaverà al modo consueto una corrispondente definizione di estensione, o misura esterna e interna. Una estensione, o una misura, sarà « completa », quando riuscirà, secondo essa misurabile ogni insieme avente misure esterna e interna uguali fra loro. Particolarmente esteso è lo studio della possibilità di « completare » una estensione, o misura. Notevole sviluppo riceve anche lo studio delle estensioni e misure in « spazi-prodotti ».

I capitoli secondo e terzo rispettivamente presentano come applicazioni della teoria generale svolta nel primo l'estensione secondo Peano-Jordan e le misure secondo Borel e secondo Lebesgue degli insiemi di punti nello spazio euclideo a n dimensioni, E_n, ove si parta dal corpo degli insiemi somme di « cubi » (intervalli n-dimensionali a dimensioni uguali, semiaperti superiormente) in numero finito di un dato reticolato. In questi due capitoli trovano posto, oltre a numerosi esempi particolari atti a illustrare la teoria, fra cui quello di una curva di Jordan di area positiva e quello di Hausdorff di un insieme non misurabile secondo Lebesgue, anche il teorema di ricoprimento di Vitali e il teorema generale sui punti di densità di un insieme qualsivoglia.

Il capitolo quarto tratta della trasformazione subita dalle misure interna e esterna secondo Lebesgue in corrispondenza a una trasformazione lineare dello spazio a n dimensioni, contiene un cenno sulle rappresentazioni misurabili di un insieme di E_n su un insieme di E_m . e dà infine esempi di misure per insiemi elementari.

Particolarmente interessante, per l'attualità degli argomenti trattati, è l'ultima parte del libro, costituita dai capitoli quinto e sesto, nel primo dei quali si ritorna alla considerazione di insiemi astratti, trasportando su questo piano generale l'idea di Carathéodory, di introdurre dapprima una « misura esterna » che può dirsi una funzione completamente subadditiva, non negativa degli insiemi M di un σ-corpo, nulla se M è vuoto, e definire poi come « misurabile » ogni insieme L del corpo stesso, tale che, per ogni M, la misura esterna di L riesca la somma di quelle di LM e di L-M. Questa teoria della misurabilità viene messa in relazione con quella studiata nel primo capitolo; inoltre si studia la « misura interna » risultante da una definizione assiomatica analoga a quella di misura esterna, e, nel caso particolare degli spazi metrici, viene dedotta la caratterizzazione di Rosenthal della misura interna secondo Carathéodory.

L'ultimo capitolo fornisce una chiara esposizione della teoria dei « somi »; un « Somenverband » (termine equivalente all'inglese « lattice ») viene presentato come una famiglia di oggetti astratti, detti somi (che, come caso particolare, si potranno pensare concretizzati in insiemi), fra coppie A, B dei quali sussiste una relazione transitiva e riflessiva del tipo $A < B$ (cui, nell'esempio concreto degli insiemi, si può attribuire il significato: « A è contenuto in B ») con la condizione che, per ogni coppia di somi A, B della famiglia, a questa appartengano sempre un minimo soma $> A$ e $> B$ e un massimo soma $< A$ e $< B$, da definirsi rispettivamente come « somma $A + B$ » e « prodotto AB ». Una famiglia cosiffatta viene poi detta una « struttura », quando ad essa appartiene il soma « vuoto » O (contenuto in tutti gli altri), e inoltre da $A_1B = O$. $A_2B = O$ segue sempre $(A_1 + A_2)B = O$ e da $A > B$ segue sempre l'esistenza di un X, tale che $A = B + X$, $BX = O$, sicchè un corpo di insiemi potrà pensarsi come un particolare esempio concreto di struttura, ma possono darsi esempi di strutture, che non sono nè corpi di insiemi, nè « isomorfe » ad alcun corpo di insiemi. Si studiano le nozioni di « isomorfia » e « omomorfia » tra strutture (seguendo l'analogia con la teoria dei gruppi). Infine si mostra come la teoria dell'estensione e della misura svolta nel primo capitolo possa estendersi dal caso di un σ-corpo di insiemi a quello di una σ-struttura. Chiude il libro una breve appendice sugli insiemi di Borel.

GIANFRANCO CIMMINO

T. Von Kàrman e M. A. Biot, *Metodi matematici nell' ingegneria,* (Introduzione alla trattazione matematica dei problemi di ingegneria), Traduzione dell' Ing. Danilo Danieli, Ed. Scientifiche Einaudi, 1951, pag. 610.

L'opera presentata dall'Editore Einaudi come secondo volume della serie di ingegneria dei Manuali Einaudi è la traduzione del testo inglese di uguale titolo « Mathematical Methods in Engineering » pubblicato dall'Editore Mc-Graw-Hill.

Esso consta di 11 capitoli, i primi due dei quali hanno carattere puramente matematico e come argomento una introduzione alle equazioni differenziali ordinarie e un cenno alle funzioni di Bessel. Un gruppo di quattro capitoli successivi imposta matematicamente problemi fondamentali della meccanica razionale con costante riferimento a schemi tecnici e con particolare riguardo alle piccole oscillazioni di sistemi, conservativi o no, e, studiando i mezzi analitici per la loro soluzione, dà anche conto di algoritmi e procedimenti classici della meccanica analitica. Due successivi capitoli sono dedicati a problemi di strutture, flessioni, deformazioni, vibrazioni di travi in varie condizioni, esaminati sotto varii aspetti e in particolare con l'applicazione della analisi di Fourier. Gli ultimi capitoli hanno interesse insieme sotto l'aspetto meccanico e sotto l'aspetto elettrotecnico e trattano della rappresentazione complessa di fenomeni periodici, del concetto generale di impedenza dei sistemi elettrici e meccanici, dei fenomeni transitorii con una sommaria posizione dei metodi operazionali, e un cenno alle applicazioni ingegneristiche delle equazioni alle differenze finite.

Un libro di cui uno degli autori sia T. Von Kármán non può non presentare pregi ragguardevoli di originalità e di eleganza di trattazione e la sua lettura è certamente utile e di molto interesse per ingegneri che vogliano approfondire certi argomenti importanti nell'ambito della tecnica moderna e vedere sotto aspetto unitario fatti fisici e tecnici fenomenologicamente diversi, particolarmente nel campo della meccanica e dell'elettrotecnica.

Un lettore italiano non può tuttavia, credo, non osservare che il libro è scritto per un pubblico che ha una formazione culturale diversa da quella che ha l'ingegnere italiano: basterebbe a provarlo l'appendice sulla terminologia che segue l'ultimo capitolo del libro. Per questo è da dubitare che il libro — a parte la mancata trattazione di argomenti fondamentali come quello delle equazioni alle derivate parziali, le equazioni integrali, le funzioni di variabile complessa, ecc. — possa didatticamente essere utile per un sistematico completamento della cultura matematica degli allievi e dei giovani ingegneri italiani. Se è vero infatti che è un gran male dimenticare nell'insegnamento della matematica volto alla formazione degli ingegneri la funzione strumentale che la matematica ha nell'ambito della fisica e della tecnica è certamente ancor maggior male dare tale strumento non completo, limitato, sia pur qualche volta, a procedimenti e formule di cui non sia esplicito e chiaro il fondamento logico. E questo — proprio per la ragione dell'ambiente per cui è stato scritto — può avvenire in qualche misura al libro in esame.

Paolo Dore